管理类专业学位硕士研究生入学统一考试

数学

管理类联考 专题课讲义

适用于MBA、MPA、MPAcc、MEM

第一部分 算术

第一章 算 术

【模块 1-01】整数、分数与小数

【考点 1-01-01】整数与自然数

【考向 1】整数与自然数的概念

【例 1】下列说法正确的是【E】

A.最小的自然数为 1

B.最小的整数为 0

C.自然数是正整数

D.有些正整数不是自然数

E.负整数与自然数构成整数

【解析】

最小的自然数应该为 0，A 错误；

最小的整数不存在，B 错误；

自然数还包括 0，C 错误；

正整数都是自然数，D 错误.

E 正确.

故选 E.

【例 2】(条件充分性判断题) m 是一个整数.【A】

（1）若 $m=\frac{p}{q}$，其中 p 与 q 为非零整数，且 m^2 是一个整数.

（2）若 $m=\frac{p}{q}$，其中 p 与 q 为非零整数，且 $\frac{2m+4}{3}$ 是一个整数.

A.条件（1）充分，但条件（2）不充分.

B.条件（2）充分，但条件（1）不充分.

C.条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分.

D.条件（1）充分，条件（2）也充分.

E.条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分.

【解析】

条件（1）,由：$m=\frac{p}{q}$ 说明 m 为有理数，m^2 是一个整数，m 也为整数，充分；

条件（2）,取反例，令 $p=-1$, $q=2$, $m=-\frac{1}{2}$，显然 $\frac{2m+4}{3}$ 是一个整数，但 m 不是整数，不充分.

故选 A.

【考点 1-01-02】奇数与偶数

【考向 1】奇数偶数的概念

【思路】根据奇数偶数的定义及性质进行分析判断.

【例 3】下列说法正确的是【D】

A.三个相邻的整数之和必为偶数

B.三个相邻的整数之积有可能为奇数

C.若两个整数之和为偶数，则这两个整数之积必为偶数

D.若两个整数之和为奇数，则这两个整数之积必为偶数

E.质数必为奇数

【解析】

三个相邻的整数之和可能为奇数，A 错误；

三个相邻的整数之积必为偶数，B 错误；

C 错误，比如 3,5 不成立；

D 正确.

除了 2 以外的质数必为奇数，E 错误.

故选 D.

【考向 2】奇数偶数的组合

【思路】根据奇数偶数的组合性质进行分析判断. 尤其本考点结合文字题中的不定方程进行考察，在下文的不定方程还有说明.

【例 4】若 x,y,z 是三个连续的负整数，并且 x＞y＞z,则下列表达式中正奇数的是【B】

A.yz－x

B.(x－y)(y－z)

C.x－yz

D.x(y＋z)

E.x＋y＋z

【解析】因为 x,y,z 是三个连续的负整数，并且 x＞y＞z,则 x－y＝1,y－z＝1,则(x－y)(y－z)＝1.故选 B.

【例 5】若 m、n 是整数，并且 m+n 为奇数，则下列说法正确的有几个【D】

(1)m-n 为奇数；(2) m^2+n^2 为奇数；(3) m^2-n^2 为奇数；(4) $m^2\times n^2$ 为奇数.

A.0

B.1

C.2

D.3

E.4

【解析】由 m＋n 为奇数得到 m 和 n 为一奇一偶，故 m^2 和 n^2 也为一奇一偶.

从而（1），（2），（3）正确，（4）错误.

*结论：若 m,n 为整数，则 $m+n,m-n,m^2+n^2,m^2-n^2,m^3+n^3,m^3-n^3$ 的奇偶性相同.

【考点 1-01-03】质数与合数

【考向 1】质数和合数的判断

【思路】根据质数与合数的定义进行分析判断，掌握常见的 20 以内的质数：2,3,5,7,11,13,17,19.

【例 6】将 210 分解为若干质数之积，则这些质数之和为【A】

A. 17
B. 18
C. 19
D. 20
E. 21

【解析】210 可以分解为 $2\times3\times5\times7$，故 $2+3+5+7=17$. 故选 A.

【例 7】用 10 以内的质数组成一个无重复数字的三位数，使它能同时被 3、5 整除，这个数最小是 m，最大是 n，则 n-m 等于【A】

A. 360
B. 345
C. 330
D. 375
E. 390

【解析】10 以内的质数有：2,3,5,7；
能被 5 整除，个位上的数只能是 5；
能被 3 整除，这个三位数各数位之和必须是 3 的倍数，所以只能用 3 和 7.
故可以得到 m 是 375，n 是 735，所以 $n-m=360$. 故选 A.

【例 8】A 是一个质数，而且 A+6，A+8，A+12，A+14 都是质数，满足要求最小质数 A 的值为 m，则 m^2+m+1 为【E】

A. 55
B. 13
C. 21
D. 43
E. 31

【解析】这道题可以用列举法进行思考，从最小的质数开始试算.
$A=2$ 时，$A+6=2+6=8$，8 是合数，所以 A 不是 2
$A=3$ 时，$A+6=3+6=9$，9 是合数，所以 A 不是 3
$A=5$ 时，$A+6=5+6=11$，11 是质数，$A+8=5+8=13$，13 是质数，$A+12=5+12=17$，17 是质数，$A+14=5+14=19$，19 也是质数.
所以 $A=5$ 是符合要求的最小质数，即 $m=5$，故 $m^2+m+1=31$. 故选 E.

【考向 2】互质的概念

【思路】公约数只有 1 的两个数称为互质数，如 4 和 9.注意不一定是质数才互质.

【例 9】下列说法正确的是【D】
A 只有两个质数才会是互质数
B. 合数与质数必是互质数
C. 两个偶数有可能是互质数
D. 两个合数有可能是互质数
E. 两个奇数不可能是互质数
【解析】
A 错误，两个合数有可能是互质数.
B 错误，不一定，比如 4 与 2.
C 错误，两个偶数不可能为互质数.
D 正确.
E 错误，不一定，比如 9 与 5.
故选 D.

【考点 1-01-04】分数小数百分数

【考向 1】分数

【思路】根据分子与分母的要求列等量关系求解.

【例 10】一个分数，分子与分母之和是 100.如果分子加 23，分母加 32，新的分数约分后为 2/3，则原分数的分母与分子之差为【A】
A. 22
B. 23
C. 24
D. 25
E. 26
【解析】新的分数，分子与分母之和是 100＋23＋32,而分子与分母之比为 2:3.
因此，分子＝（100＋23＋32）× $\frac{2}{2+3}$ ＝62，分母＝（100＋23＋32）× $\frac{3}{2+3}$ ＝93
原来的分数是 $\frac{62-23}{93-32}=\frac{39}{61}$，所以分母与分子之差为 22.故选 A.

【考向 2】循环小数

【思路】要掌握纯循环小数和混循环小数化为分数的方法.

【例 11】纯循环小数 $0.\dot{a}b\dot{c}$ 写成最简分数时，分子与分母之和是 58，求 $a+b+c$【A】
A. 18
B. 19
C. 20
D. 21
E. 22
【解析】$0.\dot{a}b\dot{c}$ 化为分数是 $\frac{abc}{999}$，当化为最简分数时，因为分母大于分子，所以分母大于 58÷2＝29,即分母是大于 29 的两位数，由 999＝3×3×3×37,推知 999 大于 29 的两位数约数只有 37,所以分母是 37,分子是 58－37＝21.

因为$\frac{21}{37}=\frac{21\times 27}{37\times 27}=\frac{567}{999}$，所以这个循环小数是0.567.故选A.

【例12】混循环小数$0.4\dot{2}\dot{7}$写成最简分数时，分母比分子大【A】

A.63

B.62

C.61

D.53

E.51

【解析】$0.4\dot{2}\dot{7}=\frac{427-4}{990}=\frac{423}{990}=\frac{47}{110}$，故分母比分子大110－47＝63.故选A.

【模块 1-02】比与比例

【考点 1-02-01】正比与反比

【考向 1】正比反比的概念

【思路】若两个变量相除为定值，则两者成正比，若两个变量相乘为定值，则两者成反比.此外，若 y 与 x 成正比，则 y 与 $\frac{1}{x}$ 成反比,这就是正比与反比的相互转化.

【例 13】下列叙述正确的有____个.【E】

(1)工作总量一定，工作效率和工作时间成反比例.

(2)分数的大小一定，它的分子和分母成正比例.

(3)在一定的距离内，车轮周长和它转动的圈数成反比例.

(4)正方形的边长和周长成正比.

(5)水池的容积一定，水管每小时注水量和所用时间成反比.

A. 1
B. 2
C. 3
D. 4
E. 5

【解析】
（1）正确，工作总量＝工作效率×工作时间，所以工作总量一定，工作效率和工作时间成反比.
（2）正确，分数＝分子÷分母.
（3）正确，距离＝车轮周长×圈数.
（4）正确，周长＝4×边长.
（5）正确，容积＝注水效率×时间.
故选 E.

【例 14】运一批煤，18 次运了 90 吨，照这样计算，____次才能运完 140 吨煤.【B】

A. 30
B. 28
C. 26
D. 24
E. 14

【解析】根据正比，可以得到每次运 90÷18＝5 吨.
故运完 140 吨需要 140÷5＝28 次. 故选 B.

【考向 2】正比与反比计算

【思路】根据正比与反比的定义，设比例系数 k，列出方程，求解比例系数即可.

【例 15】已知 $y=y_1-y_2$，且 y_1 与 $\frac{1}{2x^2}$ 成反比，y 与 $\frac{3}{x+2}$ 成正比. 当 x＝0 时，y＝－3，又当 x＝1 时，y＝1，那么 y 的表达式是【B】

A. $y=\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{x+2}$

B. $y=3x^2-\frac{6}{x+2}$

C. $y=3x^2+\frac{6}{x+2}$

D. $y=-\frac{3x^2}{2}+\frac{3}{x+2}$

E. $y=-3x^2-\frac{3}{x+2}$

【解析】根据题目得到 $y_1=\frac{k_1}{\frac{1}{2x^2}}=2k_1x^2$，$y_2=\frac{3k_2}{x+2}$，得到 $y=2k_1x^2-\frac{3k_2}{x+2}$.

根据过（0，－3）和（1，1），列出方程组 $\begin{cases}-3=-\frac{3}{2}k_2\\1=2k_1-\frac{3k_2}{3}\end{cases}$，解得 $k_1=\frac{3}{2}$，$k_2=2$.

从而 $y=3x^2-\frac{6}{x+2}$. 故选 B.

【考点 1-02-02】比例性质

【考向 1】比例计算

【思路】根据两个或多个的比例关系列等式，进行求解分析.

【例 16】甲数的 $\frac{4}{5}$ 等于乙数的 $\frac{6}{7}$（甲、乙两数都不为 0），甲、乙两数的比是【A】

A. 15:14

B. 14:15

C. 15:7

D. 8:7

E. 16:7

【解析】甲数的 $\frac{4}{5}$ 等于乙数的 $\frac{6}{7}$，得到甲：乙＝30:28＝15:14. 故选 A.

【考向 2】比例性质

【思路】比例的重要性质就是：比例外项之积=比例内项之积. 根据这个性质列等式，求解分析即可.

【例 17】在一个比例中，两个外项互为倒数，如果一个内项是 2.5，则另一个内项是【C】.

A. 0.2
B. 0.25
C. 0.4
D. 0.45
E. 2.5

【解析】因为外项之积等于内项之积，所以内项也互为倒数，故另一个内项为 1÷2.5＝0.4.
故选 C.

【考点 1-02-03】比例化简计算

【考向 1】比例计算

【思路】比例化简计算可以设比例系数 k 求解，也可以通过取特值分析. 此外，比例经常以文字应用题形式考察，下文还会详述，所以此处不再赘述.

【例 18】若 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=2:3:4$，则 $(a+b):(b+c):(c+a)=$____.【D】

A. 10:9:7
B. 9:7:10
C. 10:7:6
D. 10:7:9
E. 7:10:9

【解析】由 $\frac{1}{a}:\frac{1}{b}:\frac{1}{c}=2:3:4$ 得到 $a:b:c=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{4}=6:4:3$.
故 $(a+b):(b+c):(c+a)==(6+4):(4+3):(3+6)=10:7:9$.
故选 D.

【模块 1-03】绝对值

【考点 1-03-01】绝对值的定义

【考向 1】绝对值的定义

【思路】根据绝对值的定义来分析，其功能是：绝对值只对负数起变号作用，对正数及零无作用.

【例 19】下列说法正确的是【E】

A.有理数的绝对值必大于零

B.自然数的绝对值等于其相反数

C.质数的绝对值等于其相反数

D.奇数的绝对值等于其本身

E.无理数的绝对值必大于零

【解析】

A 错误，有理数的绝对值有可能为 0

B 错误，自然数的绝对值等于其本身；

C 错误，质数的绝对值等于其本身；

D 错误，奇数有可能为负数；

E 正确.

故选 E.

.

【例 20】下列说法正确的是【E】

A.一个实数的绝对值有两种情况

B.正数的绝对值必大于负数的绝对值

C.绝对值大的数，其本身也比较大

D.绝对值等于其本身的数只有 0

E.绝对值为 0 的数只有 0

【解析】

A 错误，每个实数的绝对值是唯一的；

B 错误，比如 2 的绝对值小于−5 的绝对值；

C 错误，比如 2 的绝对值小于−5 的绝对值，但 2 本身大于−5.

D 错误，绝对值等于其本身的数有很多；

E 正确.

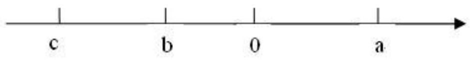
故选 E.

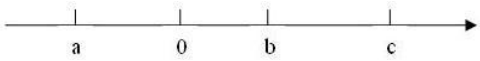
【考向 2】绝对值与数轴

【思路】根据数轴上点的位置，可以得到每个数的大小和正负情况，来去掉绝对值符号.也可以借助绝对值几何意义即数轴上点的距离来分析.

【例 21】(条件充分性判断) $|b-a|+|c-b|-|c|=a$.【A】

（1）实数 a 、b 、c 在数轴上的位置为　　（2）实数 a 、b 、c 在数轴上的位置为





A.条件（1）充分，但条件（2）不充分.
B.条件（2）充分，但条件（1）不充分.
C.条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分.
D.条件（1）充分，条件（2）也充分.
E.条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分.

【解析】

条件（1），$c<b<0<a$，则 $|b-a|+|c-b|-|c|=(a-b)+(b-c)+c=a$，充分；

条件（2），$a<0<b<c$，则 $|b-a|+|c-b|-|c|=(b-a)+(c-b)-c=-a$，不充分.

故选 A.

【考点 1-03-02】绝对值的性质

【考向 1】等价性

【思路】等价性有时结合配方公式，再根据 $\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & a\ge 0\\ -a & a<0\end{cases}$ 来分析.

【例 22】(条件充分性判断) $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$.【B】

（1）$a>0$，$b<0$.

（2）$a<0$，$b>0$.

A.条件（1）充分，但条件（2）不充分.
B.条件（2）充分，但条件（1）不充分.
C.条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分.
D.条件（1）充分，条件（2）也充分.
E.条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分.

【解析】

条件（1），$\sqrt{a^2b}$ 在 $b\geq 0$ 时才有意义，条件（1）不充分；

条件（2），当 $a<0$，$b>0$ 时，$\sqrt{a^2b}=|a|\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$，条件（2）充分.

故选 B.

【例 23】（条件充分性判断题）$|1-x|-\sqrt{x^2-8x+16}=2x-5$.【C】

（1）$x>2$

（2）$x<3$

A.条件（1）充分，但条件（2）不充分.
B.条件（2）充分，但条件（1）不充分.
C.条件（1）和（2）单独都不充分，但条件（1）和条件（2）联合起来充分.
D.条件（1）充分，条件（2）也充分.
E.条件（1）和（2）单独都不充分，条件（1）和条件（2）联合起来也不充分.

【解析】$|1-x|-\sqrt{x^2-8x+16}=|x-1|-\sqrt{(x-4)^2}=|x-1|-|x-4|$，

显然要联合分析，若 2<x<3，则 $|x-1|-|x-4|=x-1-(4-x)=2x-5$. 故选 C.

【考向 2】非负性

【思路】非负性是绝对值的重要性质，若干个具有非负性质的数之和等于零时，则每个非负数应该为零；有限个非负数之和仍为非负数.

【例 24】若 $\left(\sqrt{3}-a\right)^2$ 与 $|b-1|$ 互为相反数，则 $\frac{2}{a-b}$ 的值为【A】

A. $\sqrt{3}+1$

B. $\sqrt{3}$

C. $\sqrt{3}-1$

D. 0

E. 1

【解析】$(\sqrt{3}-a)^2$ 与 $|b-1|$ 互为相反数，得 $(\sqrt{3}-a)^2+|b-1|=0$.

又因为 $(\sqrt{3}-a)^2\geqslant 0$, $|b-1|\geqslant 0$, 则 $\sqrt{3}-a=0$, $b-1=0$,

得 a=$\sqrt{3}$ 3, b=1, $\frac{2}{a-b}=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$. 故选 A.

【例 25】已知 a、b 均为实数，且 $b=\sqrt{\frac{2a+1}{4a-3}}+\sqrt{\frac{1+2a}{3-4a}}+1$，则 $|a|+|b|$ 的值等于【C】

A. 2

B. 1

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{5}{4}$

E. $\frac{7}{6}$

【解析】要使 b 有意义，则 $\frac{2a+1}{4a-3}\geq 0$，且 $\frac{1+2a}{3-4a}\geq 0$.

则 $2a+1=0$, 即 $a=-\frac{1}{2}$, b=1, 故 $|a|+|b|=\frac{3}{2}$. 故选 C.

【考向 3】自比性

【思路】结合公式$\frac{|x|}{x}=\frac{x}{|x|}=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$，分析分式的取值情况.

【例 26】若$-2<x<3$, 则$\frac{x+2}{|x+2|}+\frac{x-3}{|x-3|}$的值为【D】

A. 1
B. 2
C. −1
D. 0
E. −2

【解析】若−2<x<3, 则$\frac{x+2}{|x+2|}+\frac{x-3}{|x-3|}=\frac{x+2}{x+2}+\frac{x-3}{3-x}=1-1=0$ 故选 D

【例 27】代数式$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}$可能的取值有____个.【B】

A. 4
B. 3
C. 2
D. 1
E. 无法确定

【解析】讨论$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}$取值，实质是讨论 a, b, c 的正负，分情况讨论.

a, b, c 都为正：$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}=1+1+1+1=4$；

a, b, c 都为负：$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}=-1-1-1-1=-4$；

a, b, c 两正一负：$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}=1+1-1-1=0$；

a, b, c 两负一正：$\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}+\frac{|abc|}{abc}=-1-1+1+1=0$.

所有可能情况有 3 种，故选 B.

第二章 应用题

【模块 2-01】比例及百分率

【考点 2-01-01】比例及计算

【考向 1】定比例问题(知总求部)

【思路】常规方法是设未知数求解，简便方法可以套公式：部分量=总量×对应的比例.

【例 1】一公司向银行借款 34 万元，欲按 $\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}$ 的比例分配给下属甲、乙、丙三车间进行技术改造，则甲车间应得

（A）17 万元　（B）8 万元　（C）12 万元　（D）18 万元　(E)19 万元

【解析】甲应得：$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}}\times 34=18$ 或由于甲：乙：丙$=\frac{1}{2}:\frac{1}{3}:\frac{1}{9}=9:6:2$，则甲$=\frac{9}{9+6+2}\times 34=18$. 故选 D.

【考向 2】定比例问题(知部求总)

【思路】常规方法是设未知数求解，简便方法可以套公式：总量$=\frac{\text{部分量}}{\text{对应的比例}}$.

【例 2】用一笔钱的 $\frac{5}{8}$ 购买甲商品，再以所余金额的 $\frac{2}{5}$ 购买乙商品，最后剩余 900 元，这笔钱的总额是

（A）2400 元　（B）3600 元　（C）4000 元　（D）4500 元　(E)5000 元

【解析】

设总额为 x，则可得出$\frac{5}{8}x+\frac{3}{8}x\times\frac{2}{5}+900=x$，则总额$=\frac{900}{1-\frac{5}{8}-\frac{3}{8}\times\frac{2}{5}}=\frac{900}{\frac{3}{8}\times\frac{3}{5}}=4000$. 故选 C.

【例 3】奖金发给甲、乙、丙、丁四人，其中 $\frac{1}{5}$ 发给甲，$\frac{1}{3}$ 发给乙，发给丙的奖金数正好是甲，乙奖金之差的 3 倍，已知发给丁的奖金为 200 元，则总奖金为

（A）1500 元　（B）2000 元　（C）2500 元　（D）3000 元　(E)5000 元

【解析】

根据题意，发给丙的是$\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)\times 3=\frac{2}{5}$，则发给丁的是$1-\frac{1}{5}-\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{1}{15}$，则奖金总数为：

$\frac{200}{\frac{1}{15}}=3000$ 元. 故选 D.

【考向 3】定比例问题(知部求部)

【思路】先要确定联系各部分量的中介量，然后可以设未知数求解或者列等式求解.

【例 4】某单位有男职工 420 人，男职工人数是女职工人数的$1\frac{1}{3}$倍，工龄 20 年以上者占全体职工人数的 20%，工龄 10~20 年者是工龄 10 年以下者人数的一半，工龄在 10 年以下者人数是

(A)250 人　(B)275 人　(C)392 人　(D)401 人　(E)500 人

【解析】由题干，男$=\frac{4}{3}\times$女，则女$=\frac{3}{4}\times$男$=\frac{3}{4}\times 420=315$，则总人数为 315+420=735，因为工龄 20 年以上者占全体职工人数的 20%，而工龄 10～20 年者是工龄 10 年以下者人数的一半，从而 10 年以下的人数为 $735\times 80\%\times\frac{2}{3}=392$ 人. 故选 C.

【考向 4】变比例问题(某量不变)

【思路】常规方法是设未知数求解，简便方法可以统一不变量的份数，分析变化量的份数情况，然后求出每份的数值即可.

【例 5】甲、乙两仓库储存的粮食重量之比为 4:3，现从甲库中调出 10 万吨粮食，则甲、乙两仓库存粮吨数之比为 7:6.甲仓库原有粮食的万吨数为

（A）70　（B）78　（C）80　（D）85　（E）88

【解析】由题，乙的库存粮食吨数不变，最开始甲：乙＝4：3，从而可以设最开始甲：乙＝4k：3k，$\frac{4k-10}{3k}=\frac{7}{6}$，解得 k＝20，从而甲原来 4k＝80. 故选 C.

【例 6】操场上有 108 名学生在锻炼身体，其中女生占$\frac{2}{9}$，又来了若干名女生后，女生人数达到男生人数的$\frac{3}{7}$. 那么后来了（　　）名女生.

A．6　B．8　C．10　D．12　E．15

【解析】设后来来了 x 名女生，$108\times\frac{2}{9}+x=108\times\frac{7}{9}\times\frac{3}{7}=36$, 解得 x＝12，故选 D.

【例 7】某国参加北京奥运会的男女运动员比例原为$19:12$，由于先增加若干名女运动员，使男女运动员比例变为$20:13$．后又增加了若干名男运动员，于是男女运动员比例最终变为$30:19$．如果后增加的男运动员比先增加的女运动员多 3 人，则最后运动员的总人数为

（A）686　（B）637　（C）700　（D）661　（E）600

【解析】设原来男生19k人，女生12k，增加x个女生，x+3个男生，$\begin{cases}\frac{19k}{12k+x}=\frac{20}{13}\\ \frac{19k+x+3}{12k+x}=\frac{30}{19}.\end{cases}$，最开始男：女=19：12=380：240，后来男：女=20：13=380：247，最后男：女=30：19=390：247，女生增加7份，男生增加10分，1份就是1人，最后共：390+247=637人.故选B.

【考向5】变比例问题(总量不变)

【思路】常规方法是设未知数求解，简便方法可以统一总量的份数，分析变化量的份数情况，然后求出每份的数值即可.

【例8】甲读一本书，已读与未读的页数之比是$3:4$，后来又读了 33页，已读与未读的页数之比变为$5:3$.这本书共有多少页？

(A) 152　　(B)168　　(C) 224　　(D) 280　　(E)300

【解析】设已读为3k,未读为4k，则$\frac{3k+33}{4k-33}=\frac{5}{3}$，解得k=24，则总共页数为24×7=168.故选B.

【考向6】变比例问题(差量不变)

【思路】对于增加或减少同样数值的比例，其差量是不变的. 常规方法是设未知数求解，简便方法可以统一差量的份数，分析变化量的份数情况，然后求出每份的数值即可.

【例9】甲、乙两仓库储存的粮食重量之比为4:3，现从甲、乙各调出10万吨粮食，则甲、乙两仓库存粮吨数之比为11:8.甲仓库原有粮食的万吨数为

（A）90　（B）100　（C）110　（D）120　（E）130

【解析】设最开始一份为k，则甲：乙=4k：3k，$\frac{4k-10}{3k-10}=\frac{11}{8}$，$k=30$，从而甲为30×4=120吨.故选D.

【考向7】变比例问题(各量都变)

【思路】对于各量都变的比例问题，建议设未知数，根据题意列方程求解.

【例10】小明和小强原有的图画纸之比是4∶3，小明又买来15张.小强用掉了8张，现有的图画纸之比是5∶2. 原来小明比小强多几张图画纸？

(A)5　(B)6　(C)8　(D)9　(E)10

【解析】设原来一份为k，则小明：小强=4k：3k，$\frac{4k+15}{3k-8}=\frac{5}{2}$，解得k为10，从而小明比小强多1×k=10张，故选E.

【考点2-01-02】百分率应用题

【考向1】单一变化率

【思路】根据现值=原值(1+变化率).

【例11】商店本月的计划销售额为20万元，由于开展了促销活动，上半月完成了计划的60%，

若全月要超额完成计划的25%，则下半月应完成销售额

(A)12 万元　　(B)13 万元　　(C)14 万元　　(D)15 万元　　(E)16 万元

【解析】由题干信息，下半月＝20×1.25－20×60%＝25－12＝13.故选 B.

【考向 2】增降并存的变化率

【思路】根据变化率公式进行分析.

【例 12】甲企业今年人均成本是去年的60%.

（1）甲企业今年总成本比去年减少25%，员工人数增加25%

（2）甲企业今年总成本比去年减少28%，员工人数增加20%

【解析】由题干中没有具体的数值，故可取特值

（1）

	总成本	人数	人均
去年	1	1	1
今年	0.75	1.25	$\frac{0.75}{1.25}=0.6$

（2）

	总成本	人数	人均
去年	1	1	1
今年	0.72	1.2	$\frac{0.72}{1.2}=0.6$

故选 D.

【考向 3】连续变化率

【思路】连续变化率公式：原值为 a，变化率为 p，则连续变化 k 次后的值为 $a(1+p)^k$.

【例 13】 银行的一年定期存款利率为 10%，某人于 2016 年 1 月 1 日存入 10000 元，2019 年 1 月 1 日取出，若按复利计算，他取某出时所得的本金和利息共计是

(A)10300 元　(B)10303 元　　(C)13000 元　　(D)13310 元　　(E)14641 元

【解析】由题干信息，本息：$10000(1+10\%)^3=10000\times 11^3=13310$.故选 D.

【例 14】某新兴产业在 2005 年末至 2009 年末产值增长率为 q ，在 2009 年末至 2013 年末产值的平均增长率比前四年下降 40%，2013 年的产值约为 2005 年产值的$14.46(\approx 1.95^4)$倍，则 q 的值约为

（A）30%　（B）35%　（C）40%　（D）45%　（E）50%

【解析】由题$(1+q)^4\times(1+0.6q)^4=14.46=1.95^4$，化简得到$(1+q)(1+0.6q)=1.95$，代入各个选项验证可知，只有 E 符合，故选 E.

【考点 2-02-01】商品利润

【考向 1】求原价或标价

【思路】根据 $售价=进价\times(1+利润率)$ 进行判断. 注意数学中的利润率在默认情况下，是以进价(成本)为基准量进行计算的，而经济学中的利润率是以售价为基准进行计算的.如果本题以售价为基准，就会得到错误答案.

【例 15】某商品的成本为 240 元，若按该商品标价的 8 折出售，利润率是 15%，则该商品的标价为

（A）276 元 （B）331 元 （C）345 元 （D）360 元 （E）400 元

【解析】由题，由利润的公式结合题干得出 240×1.15＝标价×0.8，解得标价为 345 元，故选 C.

【例 16】某种商品，甲店的进货价比乙店的进货价便宜 10%，甲店按 30%的利润定价，乙店按 20%的利润定价，结果乙店的定价比甲店的定价贵 6 元，则乙店的定价为(　　)

(A)200 (B)210 (C)220 (D)230 (E)240

【解析】可设乙的进价为 x，则甲的进价为 0.9x，$x\times1.2-0.9x\times1.3=6$，解得 x＝200，从而乙的定价为 200×1.2＝240 元. 故选 E.

【考向 2】求销量

【思路】根据进价、售价、利润的关系，列方程求销量.

【例 17】甲、乙两商店某种商品的进货价格都是 200 元，甲店以高于进货价格 20%的价格出售，乙店以高于进货价格 15%的价格出售，结果乙店的售出件数是甲店的 2 倍.扣除营业税后乙店的利润比甲店多 5400 元.若设营业税率是营业额的 5%，那么甲、乙两店售出该商品各为（　　）件.

（A）450，900 （B）500，1000 （C）550，1100 （D）600，1200 （E）650，1300

【解析】设甲为 x 件，乙为 y 件，则甲的一件的利润为 $200\times20\%-200\times1.2\times5\%=40-12=28$，乙的一件的利润为 $200\times15\%-200\times1.15\times5\%=30-11.5=18.5$，从而 $18.5\times2x-28x=5400$，解得 x＝600. 故选 D.

【考向 3】价格变化(打折优惠)问题

【思路】要掌握公式的灵活变形：

$$利润率=\frac{利润}{进价}\times100\%=\frac{售价-进价}{进价}\times100\%=(\frac{售价}{进价}-1)\times100\%\Rightarrow\frac{售价}{进价}=1+利润率;$$

$$售价=进价\times(1+利润率)\Rightarrow售价-进价=进价\times利润率.$$

【例 18】某商店将每套服装按原价提高 50%后再作 7 折“优惠”的广告宣传，这样每售一套可获利 625 元.已知每套服装的成本是 2000 元，该店按“优惠价”售出一套服装比按原价

(A)多赚 100 元 (B)少赚 100 元 (C)多赚 125 元 (D)少赚 125 元 (E)多赚 155 元

【解析】售价＝成本＋利润＝2000＋625＝2625 元，又由题干，售价＝原价×1.5×0.7＝2625，从而解得原价为$\frac{2625}{1.05}=2500$，从而优惠价比原价：2625－2500＝125，故选 C.

【例 19】一商店把某商品按标价的九折出售，仍可获利 20%，若该商品的进价为每件 21 元，则该商品每件的标价为

(A)26 元　　(B)28 元　　(C)30 元　　(D)32 元

【解析】设标价为 x ，利润=$0.9x-21=21\cdot 20\% \Rightarrow x=28$. 选 B.

【例 20】商店某种服装换季降价，原来可买 8 件的钱现在可以买 10 件，问这种服装价格下降的百分比为

（A）16%　　（B）20%　　（C）25%　　（D）28%　　(E)30%

【解析】由于题干中没有具体的数值，故可使用特值法，原来每件 10 元，现在每件 8 元，$\frac{10-8}{10}=20\%$. 故选 B.

【例 21】某商场按定价销售某种商品，每件可获利 45 元，按定价八五折销售商品 8 件与将定价降低 35 元，销售该商品 12 件所获利润相等，则该商品进价为（　　）元.

(A)155　　(B)165　　(C)175　　(D)185　　(E)195

【解析】设进价为 x 元，定价＝x＋45 元，$[(x+45)\times 0.85-x]\times 8=10\times 12$，$0.85x+45\times 0.85-x=15$，解得 x＝155. 故选 A.

【例 22】某商店花 1 万元进了一批商品，按期望获得相当于进价 25%的利润来定价，结果只销售了商品总量的 30%．为尽快完成资金周转，商店决定打折销售，这样卖完全部商品后，亏本 1 千元，问商店是按定价打（　　）折销售.

(A)9　　(B)8　　(C)7.5　　(D)6.5　　(E)6

【解析】特值法，设每件进价 100 元，数列 100 件，而这 100 件中，30%（30 件）的定价为 125 元，70%（70 件）的定价为 x 元，$125\times 30+70x=9000$，解得 x 为 75 元，从而$\frac{75}{125}=0.6$，故选 E.

【考向 4】盈亏并存问题

【思路】对于盈亏并存，要会求解最后的净利润. 根据公式净利润=盈利-亏损来求解分析.

【例 23】商店出售两套礼盒，均以 210 元售出，按进价计算，其中一套盈利 25％，而另一套亏损 25％，结果商店

（A）不赔不赚　（B）赚了 24 元　（C）亏了 28 元　（D）亏了 24 元　(E)赚了 28 元

【解析】由题干信息，总收入－总成本＝$210\times 2-\frac{210}{1+25\%}-\frac{210}{1-25\%}=-28$，故选 C.

【考向 5】恢复原价

【思路】可以记住两个规律：如果原价为a，先降$p\%$，再增$\frac{p\%}{1-p\%}$，能够恢复原值.如果原价为a，先增$p\%$，再降$\frac{p\%}{1+p\%}$，能够恢复原值.

【例 24】某种商品降价 20%后，若欲恢复原价，应提价

(A)20%　(B)25%　(C)22%　(D)15%　(E)24%

【解析】设应提价 x%，$1\times(1-20\%)(1+10\%)(1+x)=1$，解得 x＝25%，故选 B.

【模块 2－03】路程问题

【考点 2－03－01】直线路程问题

【考向 1】直线相遇

【思路】两车相向而行，相遇时间＝路程和÷速度和或相遇时间＝路程差÷速度差.

【例 25】甲乙两辆汽车同时从东西两地相向开出，甲车每小时行 56 千米，乙车每小时行 48 千米，两车在离中点 32 千米处相遇，求东西两地的距离是多少千米？【C】

A. 799

B. 810

C. 832

D. 850

E. 883

【解析】甲比乙多行的路程：32×2＝64 千米

甲、乙的速度差：56－48＝8 千米/小时.

两车相遇的时间：64÷8＝8 小时(路程差÷速度差＝相遇时间).

相遇路程：(56＋48)×8＝832 千米.

故选 C.

【例 26】甲乙两车分别从 A、B 两地同时出发，相向而行.甲每小时行 80 千米，乙每小时行全程的 10%.当乙行到全程的$\frac{5}{8}$时，甲车再行全程的$\frac{1}{6}$可到达 B 地，则 AB 两地相距____千米.【E】

A. 400

B. 450

C. 500

D. 550

E. 600

【解析】乙行到全程的$\frac{5}{8}$，用了$\frac{5}{8}\div10\%=\frac{25}{4}$小时；

此时，甲也行了$\frac{25}{4}$小时，行驶路程为$\frac{25}{4}\times80=500$千米，是全程的$\frac{5}{6}$.

则 AB 两地相距 $500\div\frac{5}{6}=600$ 千米.

故选 E.

【考向 2】直线往返相遇

【思路】对于多次往返相遇的题目，要根据两人的路程关系列方程求解.

【例 27】甲乙两辆汽车同时从东站开往西站.甲车每小时比乙车多行 12 千米，甲车行驶四个半小时到达西站后，没有停留，立即从原路返回，在距离西站 31.5 千米的地方和乙车相遇，甲车每小时行驶____千米.【A】

A. 42

B. 50

C. 55

D. 56

E. 60

【解析】

当甲乙相遇时，甲比乙多行的路程：31.5×2＝63 千米.

相遇时间：63÷12＝5.25 小时.

5.25－4.5＝0.75 小时(注：这是甲到西站后再行 31.5 千米所用的时间)

甲的速度：31.5÷0.75＝42 千米/小时.

故选 A.

【例 28】小张、小明两人同时从甲、乙两地出发相向而行，两人在离甲地 40 米处第一次相遇，相遇后两人仍以原速继续行驶，并且在各自到达对方出发点后立即沿原路返回，途中两人在距乙地 15 米处第二次相遇.甲、乙两地相距____米.【D】

A. 80

B. 90

C. 100

D. 105

E. 120

【解析】根据题意画图：

从图 2—1 可知，小张、小明两人第一次相遇时，共行的路程即是甲、乙两地之间的距离，这时，小张行了 40 米.当他们第二次相遇时，小张行了甲、乙间距离还多 15 米，小明行了两个甲、乙间距离少 15 米，合起来两个人共行了甲、乙间距离的 3 倍.因此小张从出发到第二次相遇所行的路程应是他从出发到第一次相遇所行的路程的 3 倍，即可求出他从出发到第二次相遇所行的路程.

小张从出发到第二次相遇所行的路程为 40×3＝120 米. 又知这段路程比甲、乙间距离多 15 米，甲、乙间距离为 120－15＝105 米.
故选 D.

【考向 3】直线追及

【思路】两个运动物体在不同地点同时出发（或者在同一地点而不是同时出发，或者在不同地点又不是同时出发）作同向运动，在后面的，行进速度要快些，在前面的，行进速度较慢些，在一定时间之内，后面的追上前面的物体.这类应用题就叫做追及问题.根据追及时间与路程的关系列方程，所用公式为：路程差＝速度差×追及时间.

【例 29】好马每天走 120 千米，劣马每天走 75 千米，劣马先走 12 天，好马几天能追上劣马？【C】
A. 12
B. 16
C. 20
D. 22
E. 24
【解析】劣马先走 12 天能走 75×12＝900 千米.
好马追上劣马的时间 900÷(120－75)＝20 天.
故选 C.

【例 30】人民解放军追击一股逃窜的敌人，敌人在下午 16 点开始从甲地以每小时 10 千米的速度逃跑，解放军在晚上 22 点接到命令，以每小时 30 千米的速度开始从乙地追击.已知甲乙两地相距 60 千米，问解放军____个小时可以追上敌人？【B】
A. 10
B. 11
C. 12
D. 14
E. 16
【解析】敌人逃跑时间与士兵追击时间的时差是(22－6)小时，这段时间敌人逃跑的路程是[10×(22－6)]千米，甲、乙两地相距 60 千米.
由此推知，追及时间＝[10×(22－6)＋60]÷(30－10)＝220÷20＝11 小时.
故选 B.

【考向 4】直线变速

【思路】变速运动难度较大，主要根据速度变化前后的时间关系列方程.

【例 31】长途汽车从 A 站出发，匀速行驶，1 小时后突然发生故障，车速降低了 40%，到 B 站终点延误达 3 小时，若汽车能多跑 50 公里后，才发生故障，坚持行驶到 B 站能少延误 1 小时 20 分钟，那么 A、B 两地相距____千米.【E】
A. 412.5
B. 125.5
C. 146.5
D. 152.5
E. 137.5

【解析】设原来车速为 v 千米/小时，则有 $\frac{50}{v(1-40\%)}-\frac{50}{v}=\frac{4}{3}$，解得 v＝25 千米/小时.

再设原来需要 t 小时到达，由已知有 25t＝25＋(t＋3－1)×25×(1－40%)，解得 t＝5.5 小时，所以 25×5.5＝137.5 千米.

故选 E.

【例 32】某人驾车从 A 地赶往 B 地，前一半路程比计划多用时 45 分钟，平均速度只有计划的 80%，若后一半路程的平均速度 120 千米/小时，此人还能按原定时间达到 B 地，A、B 两地的距离为【D】

A. 450 千米

B. 480 千米

C. 520 千米

D. 540 千米

E. 600 千米

【解析】设两地距离为 s，计划的平均速度为 v，则有 $\begin{cases}\frac{0.5s}{0.8v}=\frac{0.5s}{v}+\frac{45}{60}\\ \frac{0.5s}{120}=\frac{0.5s}{v}-\frac{45}{60}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}s=540\\ v=90\end{cases}$.

故选 D.

【考点 2—03—02】水中行船问题

【考向 1】与水速有关

【思路】单一物体在水上运动时，时间与水速有关.

【例 33】已知船在静水中的速度为 28 km/h，水流的速度为 2km/h.则此船在相距 78km 的两地间往返一次所需时间是【B】

A. 5.9h

B. 5.6h

C. 5.4h

D. 4.4h

E. 4h

【解析】设 v 代表船速，v_0 代表水速，s 代表路程，t 代表往返所用的时间.

则有 $t=\frac{s}{v+v_0}+\frac{s}{v-v_0}=\frac{78}{30}+\frac{78}{26}=5.6$ 小时.

故选 B.

【例 34】两艘游艇，静水中甲艇每小时行 3.3 千米，乙艇每小时行 2.1 千米．现在两游艇于同一时刻相向出发，甲艇从下游上行，乙艇从相距 27 千米的上游下行，两艇于途中相遇后，又经过 4 小时，甲艇到达乙艇的出发地．水流速度是每小时多少千米．【C】

A. 0.1

B. 0. 2
C. 0. 3
D. 0. 4
E. 0. 5
【解析】两游艇相向而行的时候，速度和等于他们在静水中的速度和，所以他们从出发到相遇的时间为 $\frac{27}{3.3+2.1}=5$ 小时，相遇又经过 4 小时甲艇到达乙艇的出发地，说明甲艇逆水行驶 27 千米需要 5＋4＝9 小时，那么甲艇逆水行驶的速度为 $\frac{27}{9}=3$ 千米/小时，则水流速度为 3. 3－3＝0. 3 千米/小时.
故选 C.

【考向 2】与水速无关

【思路】多个物体在水速运动，无论是相遇还是追及，都与水速无关. 因为水速抵消了.

【例 35】甲、乙两船在相距 90 千米的河上航行，如果相向而行，3 小时相遇；如果同向而行，则需 15 小时甲船追上乙船. 因此在静水中甲船的速度为（　　）千米/小时. 【A】
A. 18
B. 20
C. 22
D. 24
E. 26
【解析】
两船速度和：$v_{甲}+v_{乙}=90\div3=30$
两船速度差：$v_{甲}-v_{乙}=90\div15=6$.
解得 $v_{甲}=18$.
故选 A.

【例 36】一艘小轮船上午 8：00 起航逆流而上（设船速和水流速度一定），中途船上一块木板落入水中，直到 8：50 船员才发现这块重要的木板丢失，立即调转船头去追，最终于 9：20 追上木板.由上述数据可以算出木板落水的时间是【D】
A. 8：35
B. 8：30
C. 8：25
D. 8：20
E. 8：15
【解析】设水速为 $v_{水}$，船速为 $v_{船}$，起航后 t 分钟木板丢失. 从木板掉水到船员发现，用了 50－t 分钟，此时木板走了 $(50-t)v_{水}$ 的距离，船反方向走了 $(50-t)(v_{船}-v_{水})$.
从 8:50 开始追，用了半小时追上，则有关系 $(v_{船}+v_{水})\times30=(50-t)(v_{船}-v_{水})+(50-t)v_{水}+30v_{水}$，解得 t＝20，即 8：20 时木板落水.
故选 D.

【考点 2－03－03】相对速度问题

【考向 1】队伍行军

【思路】可以将队伍看成静止的，通讯员转化为相对速度分析即可.

【例 37】一支队伍排成长度为 800 米的队列行军，速度为 80 米/分，在队首的通讯员以 3 倍于行军的速度跑步到队尾，花 1 分钟传达首长命令后，立即以同样的速度跑回到队首，在这往返全工程中通讯员所花费的时间为【D】

A. 6. 5 分

B. 7. 5 分

C. 8 分

D. 8. 5 分

E. 10 分

【解析】通讯员由队首跑到队尾时，相向运动，所用时间为 $\dfrac{800}{240+80}$.

通讯员由队尾回到队首，同向运动，所用时间为 $\dfrac{800}{240-80}$

故共用时间 $\dfrac{800}{320}+\dfrac{800}{160}+1=8.5$.

故选 D.

【考向 2】火车与行人

【思路】将行人看成静止的，然后火车转化为相对分析即可.

【例 38】在一条与铁路平行的公路上有一行人与一骑车人同向行进，行人速度为 3.6 千米/小时，骑车人速度为 10.8 千米/小时. 如果一列火车从他们的后面同向匀速驶来，它通过行人的时间是 22 秒，通过骑车人的时间是 26 秒，则这列火车的车身长为____米.【D】

A. 186

B. 268

C. 168

D. 286

E. 188

【解析】设火车的速度为 v，车长为 l，由于 3. 6 千米/小时＝1 米/秒，10. 8 千米/小时＝3 米/秒，则有 $\begin{cases}\dfrac{l}{v-1}=22\\ \dfrac{l}{v-3}=26\end{cases}$，解得 l＝286.

故选 D.

【例 39】快慢两列车长度分别为 160 米和 120 米，它们相向驶在平行轨道上，若坐在慢车上的人见整列快车驶过的时间是 4 秒，那么坐在快车上的人见整列慢车驶过的时间是【A】

A. 3 秒

B. 4 秒

C. 5 秒

D. 6 秒

E. 7 秒

【解析】由于相向运动，相对速度是两列火车的速度和. 坐在慢车上的人看快车行驶，路程为快车的长度，即相对速度$\frac{160}{4}=40$米/秒.

同理，坐在快车上的人看慢车行驶，路程为慢车的长度，所以快车上的人看见整列慢车驶过的时间是$\frac{120}{40}=3$秒.

故选 A.

【考向 3】发车间隔

【思路】将行人看成静止的，然后公交车转化为相对运动分析即可.

【例 40】小明放学后沿某路公共汽车路线，匀速步行回家，沿途该路公共汽车每 12 分钟就有一辆从后面超过他，每 8 分钟就又遇到迎面开来的一辆车，如果这路公共汽车按相同的时间间隔以同一速度不停地运行，那么公共汽车每____分钟发一辆车.【E】

A. 7

B. 8

C. 8.4

D. 9

E. 9.6

【解析】因为每 12 分钟就有一辆公共汽车超过小明，所以，12 分钟公共汽车比小明多走了一个两车之间的间隔；每 8 分钟就又遇到迎面开来的一辆车，说明 8 分钟小明和公共汽车共走了一个两车之间的间隔. 所以可以假设公共汽车两车之间的间隔为一个特定的数值 x.

故有$\begin{cases}\frac{x}{v_{车}-v_{人}}=12\\ \frac{x}{v_{车}+v_{人}}=8\end{cases}$，解得$\begin{cases}v_{车}=\frac{5x}{48}\\ v_{人}=\frac{x}{48}\end{cases}$，故发车间隔$t=\frac{x}{v_{车}}=9.6$.

故选 E.

【考点 2—03—04】火车过桥问题

【考向 1】火车过桥

【思路】根据公式$t=\frac{l_{车}+l_{桥}}{v}$，列方程求解分析.

【例 41】一列火车匀速行驶时，通过一座长为 250 米的桥梁需要 10 秒钟，通过一座长为 450 米的桥梁需要 15 秒钟，该火车通过长为 1050 米的桥梁需要____秒.【D】

A. 22

B. 25

C. 28

D. 30

E. 35

【解析】设火车车身长l米，速度为 v.

则 $v=\dfrac{250+l}{10}=\dfrac{450+l}{15}$，解得 $l=150$ 米.

所以 $v=\dfrac{250+150}{10}=40$ 米/秒， $t=\dfrac{1050+l}{v}=\dfrac{1050+150}{40}=30$ 秒.

故选 D.

【考点 2－03－05】圆圈路程问题

【考向 1】同起点

【思路】如果起点相同，当同向运动时，每相遇一次，路程差为一圈；当反向运动时，每相遇一次，路程和为一圈.

【例 42】甲乙两人从同一起跑线上绕 400 米跑道同时同向跑步，甲每秒跑 6 米，乙每秒跑 4 米. 问第二次追上乙时，甲跑了____米.【A】

A. 2400

B. 2600

C. 2800

D. 3000

E. 3200

【解析】由于两人同时同向跑步，当第二次追上乙时，甲比乙多跑两圈，故所用时间为 800÷(6－4)＝400 秒，故甲总共跑了 6×400＝2400 米.

故选 A.

【考向 2】不同起点

【思路】如果两人不同起点，则第一次相遇后，就变成同起点的运动了.

【例 43】在周长为 400 米的圆形跑道的一条直径的两端，甲、乙两人分别以每秒 6 米和每秒 4 米的速度骑自行车同时同向出发（顺时针）沿圆周行驶，经过____秒甲第二次追上乙.【A】

A. 300

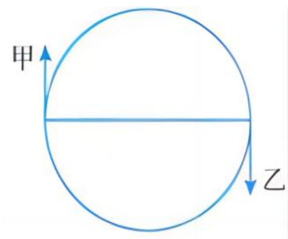
B. 320

C. 280

D. 270

E. 240

【解析】如下图，在出发的时候，甲、乙两人相距半个周长，根据路程差÷速度差＝追及时间，就可求出甲第一次追上乙的时间. 当甲追上乙后，两人就可以看作同时同地出发，同向而行. 甲要追上乙，就要比乙多骑一圈 400 米，从而可求出甲第二次追上乙的时间.



甲第一次追上乙的时间：400÷2÷(6－4)＝100 秒，

甲第二次追上乙的时间：400÷(6－4)＝200 秒，

一共所用的时间为 100＋200＝300 秒.

故选 A

【考向 3】回到起点相遇

【思路】若两人回到起点相遇，两人无论同向还是反向跑，两人都是跑整数圈，故两人的速度比＝两人的路程比＝两人的圈数比.

【例 44】甲乙两人从同一起跑线上绕 300 米跑道跑步，甲每秒跑 6 米，乙每秒跑 4 米．问第二次在起跑线追上乙时，甲跑了____米.【B】

A. 1400

B. 1800

C. 2000

D. 2100

E. 2400

【解析】设乙跑 x 圈，甲跑 y 圈，因为两人相遇时间是一样的，所以 $\frac{x\cdot 300}{4}=\frac{y\cdot 300}{6}$，化简得 $\frac{y}{x}=\frac{3}{2}$.

就是说乙跑 2 圈到起跑线，甲正好跑 3 圈也到起跑线，根据这个比例的关系，所以第二次在起跑线追上乙时，甲只要跑 6 圈就可以了，即甲跑了 1800 米.

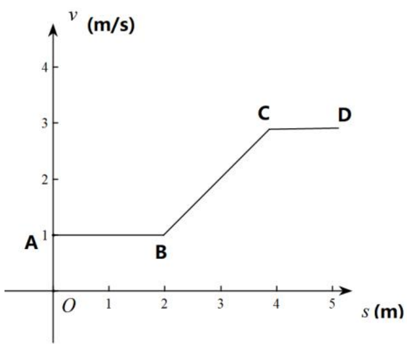
故选 B.

【考点 2－03－06】图形路程问题

【考向 1】s－v 图

【思路】对于 s－v 图,如果图形是水平的直线，则表示匀速运动，其他直线或曲线表示变速运动.

【例 45】甲物体从起点 A 运动，s－v 图如图所示，则下列说法正确的有【D】



(1)AB 段是匀速运动；

(2)BC 段是加速运动；

(3)AB 段的时间是 2 秒；

(4)CD 段的时间是 3 秒.

A.0 个

B.1 个

C.2 个

D.3 个

E.4 个

【解析】

AB 段的速度为 1 米/秒，是匀速运动，(1)正确；

BC 段速度由 1 米/秒提高到 3 米/秒，所以是加速运动，(2)正确；

AB 段的时间 $t=2\div1=2$ 秒，(3)正确；

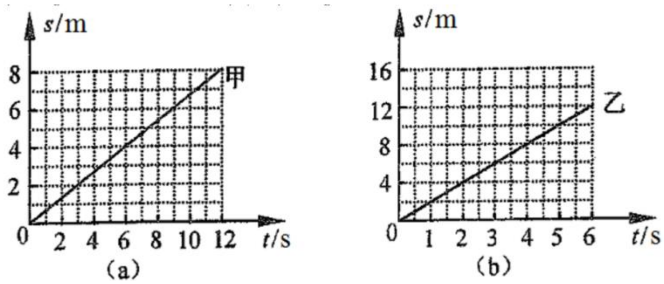
CD 段的时间 $t=\frac{1}{3}$秒，(4)错误.

故选 D.

【考向 2】$s-t$图

【思路】对于 $s-t$ 图，如果图形为直线时，表示匀速运动，直线的斜率表示速度，当斜率为 0 时，物体静止；如果图形为曲线，表示变速运动.

【例 46】甲乙两车分别从 PA 两点同时同向运动，它们的 $s-t$ 图像分别如图(a)、(b)所示，经过 6s 甲乙相遇.甲乙的速度分别为$v_{甲}$、$v_{乙}$,PA 之间的距离为 s，则有【D】



A. $v_{甲}>v_{乙},s=16m$

B. $v_{甲}>v_{乙},s=8m$

C. $v_{甲}>v_{乙},s=12m$

D. $v_{甲}<v_{乙},s=16m$

E. $v_{甲}<v_{乙},s=8m$

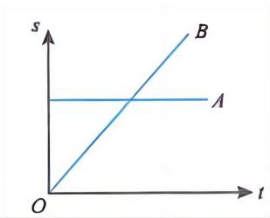
【解析】

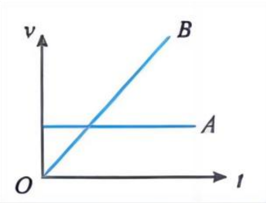
对于 $s-t$ 图像，直线的斜率$\frac{s}{t}$表示速度 v，所以$v_{甲}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$，$v_{乙}=\frac{12}{6}=2$，，从而$v_{甲}<v_{乙}$，

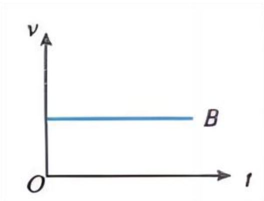
AB 之间的距离为 $s=(v_{甲}+v_{乙})\times6=(\frac{2}{3}+2)\times6=16$.

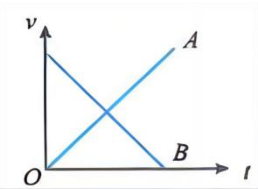
故选 D.

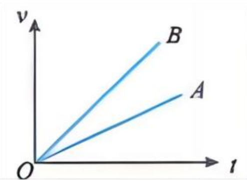
【例 47】图中所给 A、B 两物体的运动 $s-t$ 图像，判断对应的 $v-t$ 图像最有可能是【B】



A. 

B. 

C. 

D. 

E.以上均不正确

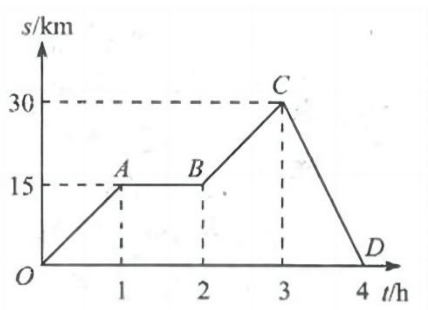
【解析】

由题干的图可知，因为 A 的 s 不变，所以速度为 0.

B 的路程 s 是 t 的一次函数，所以 B 是匀速运动. 从而对应的 B 选项是正确的.

故选 B.

【例 48】如图是一辆汽车做直线运动的 s—t 图像，对线段 OA、AB、BC、CD 所表示的运动，下列说法正确的是【C】



A.OA 段运动速度最大

B.AB 段物体做匀速运动

C.CD 段的运动方向与初始运动方向相反

D.OA 段汽车的行驶路程为 30km

E.OA 段汽车的行驶路程小于 OB 段行驶路程

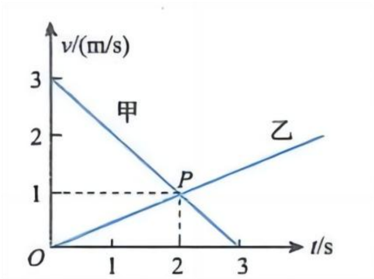
【解析】对于 s – t 图，斜率等于 s/t，表示运动速度，故由图像可以看出：

物体在CD段的斜率绝对值最大，所以速度最大，故A错误；
AB段的斜率为零，即速度为零，所以B错误；
CD段物体离起点的路程减小，所以运动方向与开始相反，故C正确；
OA段行驶的路程应该是15千米，所以D错误；
OA段的路程应该等于OB段的路程，所以E错误.
故选C.

【考向3】v－t图

【思路】对于v－t图，当图形为直线时，直线的斜率表示加速度，当斜率为0时，表示匀速运动，斜率不为零时，表示匀变速运动；当图形为曲线时，表示非匀变速运动.

【例49】如图表示甲、乙两物体的v－t运动图像，则下列正确的有【C】



(1)甲乙两物体都做匀变速运动；

(2)两物体的交点P表示t＝2s时，两物体相遇；

(3)在t＝2s之前，甲的速度大于乙，且甲在前，乙在后；

(4)甲的初速度为3m/s，当t＝3s时，甲的速度为零.

A.0个

B.1个

C.2个

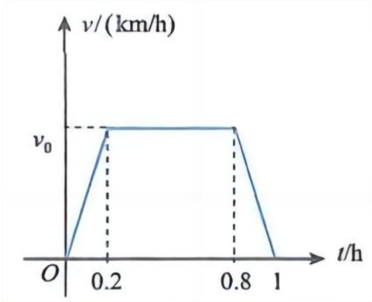
D.3个

E.4个

【解析】

由于甲、乙都是斜率不为零的直线，所以都是匀变速运动，(1)正确；
两物体的交点只表示两者的速度相同，不确定是否相遇，所以(2)错误；
在t＝2秒之前，甲的图像高于乙的图像，所以甲的速度大于乙，但无法确定甲、乙的位置，所以(3)错误；
甲的初速度为3米/秒，当t＝3秒时，甲的速度为零，所以(4)正确.
故选C.

【例50】火车行驶72km用时1小时，速度v与行驶时间t的关系如图所示，则$V_0=$【C】



A．72km/h

B．80km/h

C．90km/h

D．95km/h

E．100km/h

【解析】横、纵坐标分别为时间和速度，所以路程 72 即为梯形面积，上底为 0.6，下底为 1，高为V_0，所以$\frac{0.6+1}{2}V_0$=72，解得V_0=90.

故选 C.

【模块 2－04】工程问题

【考点 2－04－01】工程问题

【考向 1】求工作时间

【思路】根据工作时间=工作量/工作效率分析.

【例 51】一件工作，甲乙两人合作 30 天可以完成，二人共同做了 6 天后，甲离开了，由乙继续做了 40 天才完成.那么这件工作由甲单独做需要____天.【D】

A. 60
B. 65
C. 70
D. 75
E. 80

【解析】甲、乙共同做了 6 天后，这件工作还剩$1-6\times\frac{1}{30}=\frac{4}{5}$.

因此，乙的工作效率为$\frac{4}{5}\div 40=\frac{1}{50}$，则甲的工作效率为$\frac{1}{30}-\frac{1}{50}=\frac{1}{75}$.

即这件工作由甲单独做需要 75 天.

故选 D.

【例 52】一件工作，甲独做 12 小时完成，乙独做 10 小时完成，丙独做 15 小时完成.现在甲

先做 2 小时，余下的由乙丙二人合做，还需____小时才能完成.【D】

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

【解析】必须先求出各人每小时的工作效率.如果能把效率用整数表示，就会给计算带来方便，因此，我们设总工作量为 12、10 和 15 的某一公倍数，例如最小公倍数 60,则甲、乙、丙三人的工作效率分别是 60÷12＝5,60÷10＝6,60÷15＝4.

因此余下的工作量由乙、丙合做还需要$(60-5\times2)\div(6+4)=5$.

故选 D.

【例 53】一项工程，甲队独做要 10 个月完成，乙队独做要 15 个月完成.两队合做 3 个月后，乙队调走，甲队独做 2 个月后，乙队又调回与甲队一起做，前后共用____个月完成此工程.【A】

A. $6\frac{4}{5}$

B. $7\frac{4}{5}$

C. $8\frac{4}{5}$

D. $9\frac{4}{5}$

E. $10\frac{4}{5}$

【解析】由题意得：甲队每个月能完成工程的$\frac{1}{10}$，乙队每个月能完成工程的$\frac{1}{15}$.

乙队调走前，甲、乙两队已经完成了工程的$3\div(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})=\frac{1}{2}$.

乙队调回前，甲队完成了工程的$2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{5}$.

乙队调回后，还需$(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{5})\div(\frac{1}{10}+\frac{1}{15})=\frac{9}{5}$个月.

因此，前后共用了$3+2+\frac{9}{5}=6\frac{4}{5}$个月完成此工程.

故选 A.

【考向 2】求工作量

【思路】根据工作量＝工作时间×工作效率来分析.

【例 54】师徒两人加工零件 168 个，师傅加工一个零件用 5 分钟，徒弟加工一个零件用 9 分钟，完成任务时，师傅、徒弟各完成____个.【A】(注：师傅与徒弟的工作时间相同)

A. 108；60

B. 100；68
C. 106；62
D. 104；64
E. 102；66

【解析】设完成任务时，用时 x 分钟. 则师傅完成$\frac{x}{5}$，徒弟完成$\frac{x}{9}$，即$\frac{x}{5}+\frac{x}{9}=168$，解得 x=540，所以师傅完成 108 个，徒弟完成 60 个.
故选 A.

【例 55】一批零件，甲独做 6 小时完成，乙独做 8 小时完成.现在两人合做，完成任务时甲比乙多做 24 个，则这批零件共有____个.【D】
A. 138
B. 148
C. 158
D. 168
E. 178

【解析】设总工作量为 1 份，则甲每小时完成$\frac{1}{6}$份，乙每小时完成$\frac{1}{8}$份.
甲比乙每小时多完成$(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})$份，两人合做时每小时完成$(\frac{1}{6}+\frac{1}{8})$份.
因为两人合做需要$\frac{1}{(\frac{1}{6}+\frac{1}{8})}=\frac{24}{7}$小时，这个时间内，甲比乙多做 24 个零件，
所以每小时甲比乙多做$24\div\frac{1}{(\frac{1}{6}+\frac{1}{8})}=7$个零件
则这批零件共有$7\div(\frac{1}{6}-\frac{1}{8})=168$个.
故选 D.

【考向 3】轮流工作

【思路】轮流工作主要先求出一个周期的工作量，然后预估周期数，最后分析收尾的对象及需要的时间.

【例 56】某项工程，甲单独做需要 4 天可完成，乙单独做需要 5 天可完成，而丙单独做需要 6 天完成，现甲、乙、丙三人依次一日一轮换工作，则完成此任务务需____天.【C】
A. 5
B. $4\frac{3}{4}$
C. $4\frac{2}{3}$
D. $4\frac{1}{2}$
E.6

【解析】先求一个周期（每人工作一天）完成的工作量：$\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{15+12+10}{60}=\frac{37}{60}>\frac{1}{2}$，

故不到两个周期就可以完成工程，接下来逐一分析：

甲如果再做一天，还剩下$1-\frac{37}{60}-\frac{1}{4}=\frac{8}{60}<\frac{1}{5}$；

故最后乙收尾，乙还需要$\frac{\frac{8}{60}}{\frac{1}{5}}=\frac{2}{3}$天.

所以得到甲做 2 天，乙做$1\frac{2}{3}$天，丙做 1 天，共$4\frac{2}{3}$天.

故选 C.

【考向 4】变效率工程

【思路】根据效率变化前后的时间关系列方程求解. 此外，对于效率未知的工程问题，优先设效率求解.

【例 57】某石化工程公司第一工程队承包了铺设一段输油管道的工程，原计划用 9 天时间完成；实际施工时，每天比原计划平均多铺设 50 米，结果只用了 7 天就完成了全部任务. 则这段输油管道的长度为____米.【C】

A. 1565

B. 1570

C. 1575

D. 1580

E. 1585

【解析】设计划每天铺 x 米，则实际每天铺(x＋50)米.

由题意得：9x＝7(x＋50)，解得 x＝175.

则输油管道的长度为 175×9＝1575 米.

故选 C.

【例 58】某施工队承担了开凿一条长为 2400m 隧道的工程，在掘进了 400m 后，由于改进了施工工艺，每天比原计划多掘进 2m，最后提前 50 天完成了施工任务，原计划施工工期是【D】

A. 200 天

B. 240 天

C. 250 天

D. 300 天

E. 350 天

【解析】设原来计划每天掘进 x 米，则根据题意可列方程：$\frac{2400}{x}-50=\frac{400}{x}+\frac{2000}{x+2}$，解得

x＝8，则$\frac{2400}{x}=300$天.

故选 D.

【考向5】效率正负

【思路】遇到进水排水的工程问题时，可以将进水管的效率看成正，排水管的效率看成负的.

【例59】空水槽设有甲、乙、丙三个水管，甲管5分钟可注满水槽，乙管30分钟可注满水槽，丙管15分钟可把满槽水放完.若三管齐开，2分钟后关上乙管，问水槽放满时，甲管共开放了【D】

A.4分钟

B.5分钟

C.6分钟

D.7分钟

E.8分钟

【解析】由题得到甲、乙、丙的效率分别为$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{30}$和$\frac{1}{15}$.

甲管共开$\dfrac{1-(\frac{1}{5}+\frac{1}{30}-\frac{1}{15})\times 2}{\frac{1}{5}-\frac{1}{15}}+2=\dfrac{15-(6+1-2)}{3-1}+2=7$分钟.

故选D.

【例60】一个水池，上部装有若干同样粗细的进水管，底部装有一个常开的排水管，当打开4个进水管时，需要4小时才能注满水池；当打开3个进水管时，需要8小时才能注满水池，现需要2小时内将水池注满，至少要打开____个进水管.【C】

A.8

B.7

C.6

D.5

E.4

【解析】设一个进水管的效率为x，排水管的效率为y.

由题意得：$\begin{cases}4\cdot 4\cdot x-4\cdot y=1\\3\cdot 8\cdot x-8\cdot y=1\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=\frac{1}{8}\\y=\frac{1}{4}\end{cases}$.

若要2小时注满水，设至少打开n个进水管，则$n\cdot 2\cdot\frac{1}{8}-2\cdot\frac{1}{4}=1$，得n＝6.

故选C.

【考向6】求工钱或费用

【思路】【点睛】此题要找两个量，（1）各自的工作效率；（2）各自每天所得到的费用.此外，本题的运算量较大，也可以采用估算的方式定性判断.

【例61】公司的一项工程由甲、乙两队合作6天完成，公司需付8700元，由乙、丙两队合作10天完成，公司需付9500元，甲、丙两队合作7.5天完成，公司需付8250元，若单独

承包给一个工程队并且要求不超过 15 天完成全部工作，则公司付钱最少的队是【A】
A. 甲队
B. 丙队
C. 乙队
D. 甲或乙队
E. 乙或丙队
【解析】设甲、乙、丙单独完成各需的天数为 x,y,z.

则 $\begin{cases}\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{6}\\[2mm]\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{10}\\[2mm]\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{7.5}\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=10\\y=15\\z=30\end{cases}$.

再设每天付给甲、乙、丙三队的费用分别是 a,b,c，则 $\begin{cases}6a+6b=8700\\10b+10c=9500\\7.5a+7.5c=8250\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=800\\b=650\\c=300\end{cases}$.

则若要甲做，需付 $10\times800=8000$ 元；
若要乙做，需付 $15\times650=9750$ 元；
若要丙做，需付 $30\times300=9000$ 元，所以用甲队公司付钱最少且工期不超过 15 天.
故选 A.

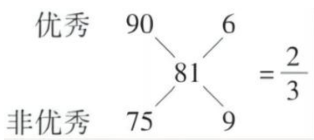
【模块 2—05】交叉比例法

【考点 2—05—01】交叉比例法

【考向 1】适合交叉比例法的情形

【思路】根据有理数与无理数的定义及特征进行判断.

【例 62】公司有职工 50 人，理论知识考核平均成绩为 81 分，按成绩将公司职工分为优秀与非优秀两类，优秀职工的平均成绩为 90 分，非优秀职工的平均成绩是 75 分，则非优秀职工的人数为【A】
A. 30 人
B. 25 人
C. 20 人
D. 18 人
E. 16 人
【解析】利用交叉法



所以，非优秀职工的人数是$50\times\frac{3}{5}=30$人.

故选 A.

【例 63】王女士以一笔资金分别投入股市和基金，但因故需抽回一部分资金.若从股市中抽回10%，从基金中抽回5%，则其总投资额减少8%，若从股市和基金的投资额中各抽回15%和10%，则其总投资额减少 130 万元，其总投资额为【A】

A. 1000 万元

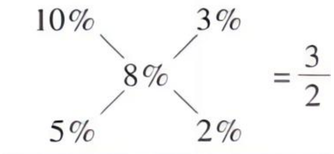
B. 1500 万元

C. 2000 万元

D. 2500 万元

E. 3000 万元

【解析】由于股票和基金的比例是固定的，利用交叉法得到股票和基金的比例：



说明股票占$\frac{3}{5}$，基金占$\frac{2}{5}$.

第二次总投资额减少$\frac{3}{5}\times15\%+\frac{2}{5}\times10\%=13\%$，所以总投资额为$\frac{130}{13\%}=1000$万元.

故选 A.

【考向 2】不适合交叉比例法的情形

【思路】当甲、乙或整体中出现未知量时，使用交叉法需要涉及到很复杂的方程，运算量比较大，所以建议采用题目中的方法二替代方法.

【例 64】某班同学在一次测验中，平均成绩为 75 分，其中男同学人数比女同学多 80%，而女同学平均成绩比男同学高 20%，则女同学的平均成绩为【B】

A. 83 分

B. 84 分

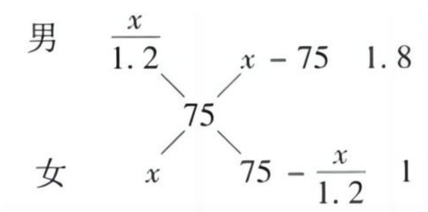
C. 85 分

D. 86 分

E. 88 分

【解析】方法一：

利用交叉法，设女同学平均成绩为x，则有：



解方程 $\frac{x-75}{75-\frac{x}{1.2}}=\frac{1.8}{1}$，解得 $x=84$.

方法二：

可以根据总分列式. 设女生为 1 人，男生为 1.8 人，$1\times x+1.8\times\frac{x}{1.2}=2.8\times75$.

解得 $x=84$.

故选 B.

【例 65】甲乙两组射手打靶，乙组平均成绩为 171.6 环，比甲组平均成绩高出 30%，而甲组人数比乙组人数多 20%，则甲、乙两组射手的总平均成绩是____环.【C】

A. 140

B. 145. 5

C. 150

D. 158. 5

E. 160

【解析】甲组平均成绩是 $\frac{171.6}{1+30\%}=132$ 环，设乙组有 1 人，则甲组有 1. 2 人，所以总平均成绩是 $\frac{132\times1.2+171.6\times1}{1.2+1}=150$ 环.

故选 C.

【模块 2－06】溶液浓度

【考点 2－06－01】溶液浓度

【考向 1】溶质溶剂单一变化

【思路】根据不变量列方程求解.具体分为：(1)“稀释”问题：特点是加“溶剂”，解题关键是找到始终不变的量（溶质）.(2)“浓缩”问题：特点是减少溶剂，解题关键是找到始终不变的量（溶质）.(3)“加浓”问题：特点是增加溶质，解题关键是找到始终不变的量（溶剂）.

【例 66】含盐 12.5%的盐水 40 千克蒸发掉部分水分后变成了含盐 20%的盐水，蒸发掉的水水分重量为____千克.【E】

A. 19

B. 18

C. 17

D. 16

E. 15

【解析】设蒸发掉水的质量为 x 千克，根据溶质不变，列方程：40×12. 5%＝(40－x)×20%，解得 x＝15.

故选 E.

【考向 2】溶液混合

【思路】如果已知每部分的浓度和混合后的浓度，采用交叉比例法求解. 如果每部分的浓度及溶液量的知道，求混合后的浓度，采用权重法求解.

【例 67】若用浓度为 30%和 20%的甲乙两种食盐溶液配成浓度为 24%的食盐溶液 500 克，则甲乙两种溶液各取【E】

A. 180 克，320 克

B. 185 克，315 克

C. 190 克，310 克

D. 195 克，305 克

E. 200 克，300 克

【解析】利用交叉法，

$$\begin{array}{ccc} 30\% & & 4\% \\ & 24\% & \\ 20\% & & 6\% \end{array} = \frac{2}{3}$$

所以甲为 200 克，乙为 300 克.

故选 E.

【考向 3】等量置换

【思路】对于用溶剂等量置换溶液问题，可以记住结论：设体积为 v 升溶液，倒出 m 升，补等量的水，则浓度为原来的 $\frac{v-m}{v}$.

【例 68】某容器中装满了浓度为 90%的酒精，倒出 1 升后用水将容器注满，搅拌均匀后又倒出 1 升，再用水将容器注满，已知此时的酒精浓度为 40%，该容器的体积是【B】

A. 2.5 升

B. 3 升

C. 3.5 升

D. 4 升

E. 4.5 升

【解析】设容器的体积为 v 升.

则第一次倒出 1 升后溶液的溶质为 $0.9v-0.9\times1=0.9(v-1)$, 此时浓度为 $\frac{0.9(v-1)}{v}$.

第二次倒出 1 升后溶液的溶质为 $\frac{0.9(v-1)}{v}\cdot(v-1)=\frac{0.9(v-1)^2}{v}$ ，此时溶液的浓度为 $\frac{0.9(v-1)^2}{v^2}$, 故 $\frac{0.9(v-1)^2}{v^2}=0.4$, 得 v=3 或 $\frac{3}{5}$ (舍去).

故选 B.

【例 69】一瓶浓度为 20%的消毒液倒出 2/5 后，加满清水，再倒出 2/5 后，又加满清水，此时消毒液的浓度为【A】
A. 7. 2%
B. 3. 2%
C. 5. 0%
D. 4. 8%
E. 3. 6%

【解析】一瓶浓度为 20%的消毒液倒出 $\frac{2}{5}$ 后，加满清水，说明溶液跟原来一样多，溶质减少了 $\frac{2}{5}$，故浓度为原来的 $\frac{3}{5}$，再操作一次，浓度又为上次的 $\frac{3}{5}$，故最后浓度变为 $20\%\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}=7.2\%$.

故选 A.

【考向 4】互相倒溶液

【思路】对于多容器互相倒溶液，每倒一次，相当于混合一次，多次用交叉比例法求解即可.

【例 70】在某实验中，三个试管各盛水若干克.现将浓度为 12%的盐水 10 克倒入 A 管中，混合后，取 10 克倒入 B 管中，混合后再取 10 克倒入 C 管中，结果 A，B，C三个试管中盐水的浓度分别为 6%、2%、0.5%，那么三个试管中原来盛水最多的试管及其盛水量各是【C】
A. A 试管，10 克
B. B 试管，20 克
C. C 试管，30 克
D. B 试管，40 克
E. C 试管，50 克

【解析】

A 试管中：水为 10 克(浓度由 12%变为 6%)；

B 试管中：水为 20 克(浓度由 6%变为 2%)；

C 试管中：水为 30 克(浓度由 2%变为 0.5%).

故选 C.

【例 71】甲杯中有纯酒精 12 克，乙杯中有水 15 克，第一次将甲杯中的部分纯酒精倒入乙杯，使酒精与水混合.第二次将乙杯中的部分混合溶液倒入甲杯，这样甲杯中纯酒精含量为 50%，乙杯中纯酒精含量为 25%.问第二次从乙杯倒入甲杯的混合溶液是____克.【B】
A. 13
B. 14
C. 15
D. 16

E. 17

【解析】第一次甲倒入乙以后，乙的浓度就是 25%.

甲倒入乙的酒精为 $15\div(1-25\%)-15=5$ 克，甲中剩余纯酒精为 $12-5=7$ 克.

第二次从乙倒入甲的溶液与甲中剩余 7 克纯酒精的比为(100－50)：(50－25)＝2：1.

则第二次从乙倒入甲的溶液有 $7\times2=14$ 克.

故选 B.

【考向 5】其他等量关系

【思路】可以根据溶质或溶剂来列方程，或者根据浓度的定义来分析.

【例 72】两个相同的瓶子里装满酒精溶液，一个瓶中酒精与水的质量比是 3：1，而另一个瓶中酒精与水的质量比是 4：1．若把两个瓶中的酒精溶液混合，混合液中酒精和水的质量之比是【D】

A. 7：2

B. 3：1

C. 19：7

D. 31：9

E. 29：9

【解析】设酒精溶液的质量为 m，由题意知一个瓶中酒精溶液的浓度为 $\frac{3}{4}$，另一个瓶中酒精溶液的浓度为 $\frac{4}{5}$. 则混合液中酒精的含量为 $\frac{\frac{3}{4}m+\frac{4}{5}m}{m+m}=\frac{31}{40}$，故混合液酒精和水的质量之比是 31：9.

故选 D.

【例 73】甲容器中有 5%的盐水 120 克，乙容器中有某种浓度的盐水若干．从乙中取出 480 克盐水，放入甲种混合成浓度为 13%的盐水，则乙容器中的盐水浓度是【D】

A. 8%

B. 10%

C. 12%

D. 15%

E. 17%

【解析】混合后甲容器中盐的质量为 $(120+480)\times13\%=78$ 克.

混合前甲容器中盐的质量为 $120\times5\%=6$ 克.

则乙的 480 克盐水中盐的质量为 $78-6=72$ 克.

则乙容器中的盐水浓度为 $\frac{72}{480}=15\%$.

故选 D.

【例 74】在浓度为 40%的酒精中加入 4 千克水，浓度变为 30%，再加入 M 千克纯酒精，浓度变为 50%，则 M 为【D】

A. 4.8

B. 5.6

C. 6

D. 6. 4

E. 7. 2

【解析】设原酒精溶液质量为 x, $40\% \cdot x = (4 + x) \times 30\%$，解得 $x = 12$.

现在总质量为 $12 + 4 = 16$ 千克, 加入 M 千克纯酒精后, $16 \times 30\% + M = (16 + M) \times 50\%$, 解得 $M = 6.4$.

故选 D.

【例 75】已知某浓度为 5%的盐水 60 克，和浓度为 20%的盐水 40 克混合在一起，倒掉 10 克，再加入 10 克的水，现在盐水浓度是【C】

A. 7. 9%

B. 8. 9%

C. 9. 9%

D. 10. 9%

E. 11. 9%

【解析】

浓度 5% 的盐水 60 克与浓度 20% 的盐水 40 克混合在一起后，浓度为 $\frac{5\% \cdot 60 + 20\% \cdot 40}{100} \times 100\% = 11\%$.

倒掉 10 克，再加入 10 克的水后，盐水浓度为 $\frac{11\% \cdot 90}{100} \times 100\% = 9.9\%$.

故选 C.

第二部分 代 数

第三章 整式分式与函数

【模块 3－01】整式及其运算

【考点 3－01－01】六大公式

【考向 1】平方差公式

【思路】平方差公式，要掌握该公式的两种应用，一个是出现根号的有理化，另外就是长串数字的乘法化简.

【例 1】关于$\sqrt{3}\div(3-\sqrt{3})$，下列说法正确的为【E】

A.其数值为有理数

B.其数值小于 1

C.其数值大于$\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

D.其数值大于 2

E.其数值大于 1 小于 2

【解析】$\sqrt{3}\div(3-\sqrt{3})=\frac{\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\cdot(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}=\frac{3\sqrt{3}+3}{9-3}=\frac{\sqrt{3}+1}{2}$.

因为$\sqrt{3}\approx1.732$，所以$1<\frac{\sqrt{3}+1}{2}<2$.

故选 E.

【例 2】若实数a不为 1，则$(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\cdots(a^{64}+1)$为【E】

A.$\dfrac{a^{128}+1}{a-1}$

B.$\dfrac{a^{128}-1}{a+1}$

C.$\dfrac{a^{128}+1}{a+1}$

D.$-\dfrac{a^{128}-1}{a-1}$

E.$\dfrac{a^{128}-1}{a-1}$

【解析】由于实数 a 不为 1，故（a+1）（a^2+1）（a^4+1）…（$a^{64}+1$）= $\frac{(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\dots(a^{64}+1)}{a-1}=\frac{(a^{64}-1)(a^{64}+1)}{a-1}=\frac{a^{128}-1}{a-1}$.

故选 E.

【考向 2】两数完全平方公式

【思路】对于两数的完全平方公式，要学会灵活变形和应用：$a^2+b^2=(a\pm b)^2\mp 2ab,(a+b)^2+(a-b)^2=2a^2+2b^2$，

$ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}=\frac{(a^2+b^2)-(a-b)^2}{2}=\frac{(a+b)^2-(a-b)^2}{4}$；

$(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$；此外，还要注意出现倒数的特殊应用.

【例 3】已知 $(x+2y)^2=40,\ xy=2$，求 $(x-2y)^2=$【D】

A. 36
B. 32
C. 30
D. 24
E. 22

【解析】$(x+2y)^2=x^2+2\cdot x\cdot 2y+(2y)^2=x^2+4xy+4y^2$,
$(x-2y)^2=x^2-2\cdot x\cdot(2y)+(2y)^2=x^2-4xy+4y^2$,
所以 $(x-2y)^2=(x+2y)^2-8xy=40-16=24$.
故选 D.

【例 4】已知 $x+\frac{1}{x}=3$，求：

(1) $x^2+\frac{1}{x^2}=$【A】

(2) $x^4+\frac{1}{x^4}=$【D】

A.7
B.9
C.30
D.47
E.49

【解析】

（1）$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=3^2-2=7$.

（2）$x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=7^2-2=47$.

故第（1）题选 A. 第（2）题选 D.

【例 5】已知 $x-\dfrac{1}{x}=3$，则：

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=$【C】，

(2) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=$【D】.

A.7

B.9

C.11

D.119

E.123

【解析】

（1）$x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2=3^2+2=11.$

（2）$x^4+\frac{1}{x^4}=(x^2+\frac{1}{x^2})^2-2=11^2-2=119.$

故第（1）题选 C. 第（2）题选 D.

【例 6】已知 $x^2-3x+1=0$，求$x^2+\frac{1}{x^2}=$【A】

A. 7

B. 9

C. 11

D. 119

E. 123

【解析】$x^2-3x+1=0$ 两边同除以 x,

可得$x+\frac{1}{x}=3$, 又因为$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=3^2-2=7.$

故选 A.

【例 7】若$x^4-7x^2+1=0$，则$x+\frac{1}{x}=$【C】

A. 3

B. 5

C. ±3

D. ±5

E. −5

【解析】

由$x^4-7x^2+1=0$ 得到$x^2+\frac{1}{x^2}=7.$

故$x^2+\frac{1}{x^2}=(x+\frac{1}{x})^2-2=7$；所以$(x+\frac{1}{x})^2=9$，即 $x+\frac{1}{x}=\pm3.$

故选 C.

【考向 3】三数完全平方公式

【思路】对于完全平方公式，要注意公式移项变形：

$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)$，$2(ab+bc+ac)=(a+b+c)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)$，

此外要注意出现倒数的特殊应用：当$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$时，可以得到$ab+bc+ac=0$，从而有$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2$.

【例 8】表达式$(a-b+c)^2+(a-b-c)^2=$【D】

A. $2(ab)^2-2c^2$

B. $2(a+b)^2+2c^2$

C. $2(a+b)^2-2c^2$

D. $2(a-b)^2+2c^2$

E. $2(a-c)^2+2b^2$

【解析】$(a-b+c)^2+(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac+a^2+b^2+c^2-2ab+2bc-2ac=2a^2+2b^2+2c^2-4ab=2(a-b)^2+2c^2$.

故选 D.

【例 9】若实数a，b，c满足：$a+b+c=1$和$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+4}=0$，则代数式$(a+2)^2+(b+3)^2+(c+4)^2$为【D】

A. 10

B. 50

C. 80

D. 100

E. 200

【解析】由$\frac{1}{a+2}+\frac{1}{b+3}+\frac{1}{c+4}=0$，

得$(a+2)^2+(b+3)^2+(c+4)^2=(a+2+b+3+c+4)^2=10^2=100$.

故选 D.

【例 10】若实数a，b，c满足：$a^2+b^2+c^2=9$，则代数式$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$的最大值是【B】

A. 21

B. 27

C. 29

D. 32

E. 39

【解析】$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=2(a^2+b^2+c^2)-(2ab+2bc+2ac)=2(a^2+b^2+c^2)-[(a+b+c)^2-(a^2+b^2+c^2)]=3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c)^2=27-(a+b+c)^2\leq$

27.当 $a+b+c=0$ 时，有最大值 27.

故选 B

【考向 4】配方公式

【思路】记住公式 $a^2+b^2+c^2\pm ab\pm ac\pm bc=\frac{1}{2}\left[(a\pm b)^2+(b\pm c)^2+(a\pm c)^2\right]$.

【例 11】已知 a，b，c 为三角形的三条边，且满足 $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，则三角形为【C】

A. 等腰三角形
B. 直角三角形
C. 等边三角形
D. 等腰直角三角形
E. 钝角三角形

【解析】根据 $a^2+b^2+c^2=ab+ac+bc$，得 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]=0$.所以 $a=b=c$.所以三角形为等边三角形.

故选 C.

【例 12】若 x,y,z 为实数，设 $A=x^2-2y+\frac{\pi}{2}$，$B=y^2-2z+\frac{\pi}{3}$,$C=z^2-2x+\frac{\pi}{6}$,则在 A，B，C 中【A】

A. 至少有一个大于零
B. 至少有一个小于零
C. 都大于零
D. 都小于零
E. 至少有两个大于零

【解析】$A+B+C=x^2-2x+1+y^2-2y+1+Z^2-2z+1+\pi-3$

$=(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2+(\pi-3)>0$,

则 A,B,C 至少有一个大于零.
故选 A.

【考向 5】立方和差公式

【思路】记住公式 $a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$.

【例 13】$(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16)=$【C】

A. x^4-64

B. x^5-64

C. x^6-64

D. x^8-64

E. x^6+64

【解析】先使用平方差公式，再使用立方差公式.

$(x-2)(x+2)(x^4+4x^2+16)=(x^2-4)(x^4+4x^2+16)=(x^2)^3-4^3=x^6-64$.

故选 C.

【例 14】$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=$【E】

A. x^4-1

B. x^5-1

C. x^6+1

D. x^8-1

E. x^6-1

【解析】$(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)=(x^2-1)[(x^2+1)^2-x^2]=(x^2-1)(x^4+2x^2+1-x^2)=(x^2-1)(x^4+x^2+1)=(x^2-1)[(x^2)^2+x^2+1^2]=(x^2)^3-1^3=x^6-1$.

故选 E.

【例 15】设实数 a，b 满足$|a-b|=2$，$|a^3-b^3|=28$，则$a^2+b^2=$【E】

A. 30
B. 22
C. 15
D. 13
E. $\frac{32}{3}$

【解析】$|a^3-b^3|=|a-b|\cdot|a^2+ab+b^2|=28$, 所以$|a^2+ab+b^2|=14$,

因为 $a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geq 0$, 故$|a^2+ab+b^2|=a^2+ab+b^2=14$.

又因为$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2=4$, 则 $a^2+b^2=\frac{32}{3}$.

故选 E.

【考向 6】和差立方公式

【思路】记住公式$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$.

【例 16】已知 $x(1-kx)^3 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$ 对所有实数 x 成立.若 $a_2 = -9$，求 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 和 a_3 的值【B】

A.－8，21

B.－8，27

C.8，29

D.8，－27

E.－8，－27

【解析】利用公式$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3a^2b + 3ab^2$展开，

$f(x) = x(1-kx)^3 = x[1-(kx)^3 - 3\cdot kx + 3(kx)^2]$

$= x - 3kx^2 + 3k^2x^3 - k^3x^4 \quad = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$，

由 $a_2 = -9$, 即 $-3k = -9$, 得 $k = 3$.

则 $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = f（1）= (1-3)^3 = -8$;

$a_3 = 3k^2 = 27$.

故选 B.

【例 17】已知非零实数 a,b,c 满足 $a+b+c=0$，求 $a^3+b^3+c^3-3abc$ 的值为【C】

A.－1

B.2

C.0

D.3

E.1

【解析】

$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab]$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)=0$.

故选 C.

【考点 3－01－02】整式加减及乘法运算

【考向 1】多项式求值

【思路】在有些求代数式的值的问题中，往往题目中并没有直接告诉字母的值，而且通过已知条件很难求出未知数的值来，通常进行整体代入，求得代数式的值.

【例 18】已知 $y = ax^7 + bx^5 + cx^3 + dx + e$，其中 a,b,c,d,e 为常数，当 $x = 2$ 时，$y = 23$；当 $x = -2$ 时，$y = -35$，那么 e 的值是【B】

A. 6

B. －6

C. 12

D. －12

E. 1

【解析】由题设知，当 x = 2 时，$23 = a\cdot 2^7 + b\cdot 2^5 + c\cdot 2^3 + d\cdot 2 + e$①

当 $x =- 2$ 时，$-35 = a\cdot(-2)^7 + b\cdot(-2)^5 + c\cdot(-2)^3 + d\cdot(-2) + e$

即 $-35 =- a\cdot 2^7 - b\cdot 2^5 - c\cdot 2^3 - d\cdot 2 + e$②

①＋②，得 $2e =- 12$，所以 $e =- 6$.

故选 B.

【考向 2】多项式相等

【思路】两多项式相等，次数相等的项所对应的系数相等即可.判断两多项式相等与否，首先要看其项数是否相等，这个是两多项式相等的必要条件，但不是充分条件.

【例 19】已知 a、b、c 为实数，若多项式 $f(x)=-7x+4$ 与 $g(x)=a(x-1)^2-b(x+2)+c(x^2+x-2)$ 相等，求 $a+b+c$ 的值【C】

A.2

B.3

C.1

D.－1

E.－2

【解析】可以利用多项式相等的定义，即若两个多项式相等，必有对应项的系数相等，两个多项式的项数相等.

而 $g(x)=a(x-1)^2-b(x+2)+c(x^2+x-2)=(a+c)x^2+(c-2a-b)x+a-2b-2c$.

有 $\begin{cases} a+c=0 \\ c-2a-b=-7 \\ a-2b-2c=4 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases}$，$a + b + c = 1$.

故选 C.

【考向 3】多项式相乘

【思路】对于多项式相乘，求某项系数时，可以采用搭配法求解.

【例 20】已知 $(x^2+px+8)(x^2-3x+q)$ 的展开式中不含 x^2, x^3 项，求 $p+q$ 的值【E】

A.－3

B.－2

C.2

D.3

E.4

【解析】x²项的系数为：8－3p＋q；x³项的系数为：－3＋p.

因为展开式中不含 x^2,x^3项，所以$\begin{cases}8-3p+q=0\\-3+p=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}p=3\\q=1\end{cases}$.

故选 E.

【考向 4】多项式求系数

【思路】对于多项式，求各项系数和时，可以对 x 取特值分析，常用的是取 1，－1，和 0.

【例 21】已知$(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$是关于 x 的恒等式．求：

(1) $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$的值【B】

A. −1
B. 1
C. 32
D. －32
E. 64

【解析】令 x＝1,得 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$.

故选 B.

(2) $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$的值【B】

A. －1
B. －243
C. 1
D. 243
E. －240

【解析】令 x＝－1, 得 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5=-243$.

故选 B.

(3) $a_0+a_2+a_4$的值【A】

A. －121
B. 121
C. －120

D. 120
E. －122

【解析】将 $a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 与 $a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$ 两式相加，

得 $a_0+a_2+a_4=-121$.

故选 A.

(4) $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$ 的值【B】

A. 1
B. 2
C. －1
D. －2
E. 32

【解析】令 $x=0$，得 $a_0=(-1)^5=-1$，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1-(-1)=2$.

故选 B.

【考点 3－01－03】整式的除法

【考向 1】整除及因式

【思路】若出现整除，可以用因式定理求解. 因式定理可以巧妙的理解为，因式为零时，原表达式也为零.

【例 22】若多项式 $f(x)=x^3+a^2x^2+x-3a$ 能被 $x-1$ 整除，则实数 $a=$【E】

A. 0
B. 1
C. 0 或 1
D. 2 或－1
E. 2 或 1

【解析】根据因式定理，有 f（1）$=1+a^2+1-3a=0$，解得 a＝1 或 a＝2.

故选 E.

【例 23】若 x^3+x^2+ax+b 能被 x^2-3x+2 整除，则【D】

A. a＝4, b＝4
B. a＝－4, b＝－4
C. a＝10, b＝－8
D. a＝－10, b＝8
E. a＝2, b＝0

【解析】设 $f(x)=x^3+x^2+ax+b$，令 $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)=0$.

当 x＝1 时，f（1）＝a＋b＋2＝0.

当 x＝2 时，f（2）＝2a＋b＋12＝0.

解得 a＝－10, b＝8.

故选 D.

【例 24】多项式x^3+ax^2+bx-6的两个因式是$x-1$和$x-2$，则其第三个一次因式为【B】

A. x－6

B. x－3

C. x＋1

D. x＋2

E. x＋3

【解析】由题，可令 $x^3+ax^2+bx-6=(x-1)(x-2)(x+p)$.

根据常数项(或令 x＝0)得$(-1)\times(-2)\times p=-6$，p＝－3, 所以因式为 x－3.

故选 B.

【考向 2】十字相乘分解法

【思路】用于分解$abx^2+(bp+aq)x+pq$型的式子，这类二次三项式的特点是：二次项的系数、常数项是两个数的积；一次项系数是二次项系数的因数与常数项系数的因数乘积的和.特殊情况时，二次项的系数为 1.分解出来，$abx^2+(bp+aq)x+pq=(ax+p)(bx+q)$.

【例 25】下列分解因式正确的有____个.【D】

（1）$7x^2-19x-6=(x+3)(7x-2)$

（2）$6x^2-7x-5=(2x+1)(3x-5)$

（3）$x^2-13xy-30y^2=(x+2y)(x-15y)$

（4）$a^2b^2-10ab-39=(ab+3)(ab-13)$

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 4

【解析】（1）$7x^2-19x-6=(7x+2)(x-3)$.

（2）$6x^2-7x-5=(2x+1)(3x-5)$.

（3）$x^2-13xy-30y^2=(x+2y)(x-15y)$.

（4）$a^2b^2-10ab-39=(ab+3)(ab-13)$.

故（2）（3）（4）正确.

故选 D.

【考向 3】双十字相乘

【思路】分解二次三项式时，常用十字相乘法，但对于某些二元二次六项式($ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$)，需要用双十字相乘法分解因式.

【例 26】下列分解因式正确的有____个.【E】

（1）$x^2-3xy-10y^2+x+9y-2=(x-5y+2)(x+2y-1)$

（2）$x^2-y^2+5x+3y+4=(x+y+1)(x-y+4)$

（3）$xy+y^2+x-y-2=(y+1)(x+y-2)$

（4）$6x^2-7xy-3y^2-xz+7yz-2z^2=(2x-3y+2)(3x+y-2z)$

A. 0

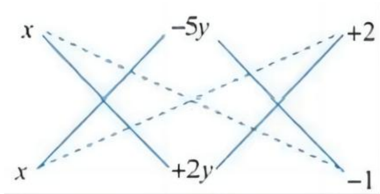
B. 1

C. 2

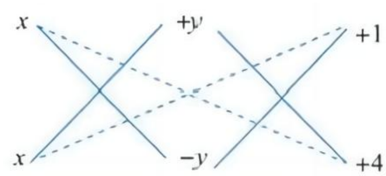
D. 3

E. 4

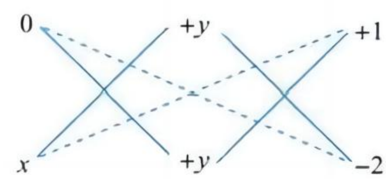
【解析】(1) 正确. 如图, 原式$=(x-5y+2)(x+2y-1)$.



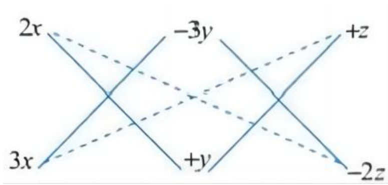
(2) 正确. 如图, 原式$=(x+y+1)(x-y+4)$.



(3) 正确. 如图, 原式中缺 x^2项， 可把这一项的系数看成 0 来分解. 原式$=(y+1)(x+y-2)$.



(4) 正确. 如图, 原式$=(2x-3y+z)(3x+y-2z)$.



故 4 个正确. 故选 E.

【考向 4】公因式及公倍式

【思路】将每个多项式进行因式分解，然后求出公因式及公倍式. 对于高次多项式分解，一般进行拆项，然后再分组分解即可.

【例 27】x^3-9x+8 与 $x^9+x^6+x^3-3$ 都含有的因式为：【C】

A. $x+1$

B. x^2+x+1

C. $x-1$

D. (x－1)(x＋1)

E. x^2－x＋1

【解析】把 8 拆成－1＋9,则有：

$x^3-9x+8=x^3-9x-1+9=(x^3-1)-(9x-9)=(x-1)(x^2+x-8)$,

把－3 拆成－1－1－1,有：

$x^9+x^6+x^3-3=(x^9-1)+(x^6-1)+(x^3-1)=(x^3-1)(x^6+2x^3+3)=(x-1)(x^2+x+1)(x^6+2x^3+3)$.

都含有因式(x－1).故选 C.

【考向 5】余式

【思路】余式定理的描述如下：多项式 $f(x)$ 除以 $x-a$ 的余式为 $f(a)$，推论：多项式 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的余式为 $f(\frac{b}{a})$.此外，被除式＝除式×商＋余式.

【例 28】设 $f(x)$ 为整数系数多项式，$f(x)$ 除以 $x-1$，余数为 9；$f(x)$ 除以 $x-2$，余数为 16，则 $f(x)$ 除以 $(x-1)(x-2)$ 的余式为【A】

A.7x＋2

B.7x＋3

C.7x＋4

D.7x＋5

E.2x＋7

【解析】设 f(x)＝(x－1)(x－2)q(x)＋ax＋b，已知 f(1)＝9，f(2)＝16.

有：$\begin{cases} f(1)=a+b=9 \\ f(2)=2a+b=16 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=7 \\ b=2 \end{cases}$，故余式为 7x＋2.

故选 A.

【模块 3－02】分式及其运算

【考点 3－02－01】分式及运算

【考向 1】分式的化简求值

【思路】对于分式化简求值，可以先转化为整式，求出参数之间的关系，然后再代入到所求的分式化简.

【例 29】若 a，b 均为实数，且 $\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$，则 $\frac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}=$【E】

A. $\frac{1}{114}$

B. $\frac{1}{124}$

C. $\frac{1}{130}$

D. $\frac{1}{132}$

E. $\frac{1}{134}$

【解析】由$\frac{a^2b^2}{a^4-2b^4}=1$，得$a^4-a^2b^2-2b^4=0$，即$a^2=2b^2$或$a^2=-b^2$(舍)，若$a^2=2b^2$，则$\frac{a^2-b^2}{19a^2+96b^2}=\frac{1}{134}$.

故选E.

【考向2】分式的大小比较

【思路】本题属于分式的比较，当分子和分母都不相同时，往往要固定分子或分母的其中一个，再比较其大小.

【例30】若$a>b>0$，$k>0$，则下列不等式中能够成立的是【C】

A. $-\frac{b}{a}<-\frac{b+k}{a+k}$

B. $\frac{a}{b}>\frac{a-k}{b-k}$

C. $-\frac{b}{a}>-\frac{b+k}{a+k}$

D. $\frac{a}{b}<\frac{a-k}{b-k}$

E. $\frac{a}{b}<\frac{a-2k}{b-2k}$

【解析】由于a＞b＞0，k＞0，所以ak＞bk，从而ak＋ab＞bk＋ab，即a(b＋k)＞b(a＋k)，故$\frac{b}{a}<\frac{b+k}{a+k}$，得到$-\frac{b}{a}>-\frac{b+k}{a+k}$.

故选C.

【考向3】分式为定值

【思路】对于分式为定值，可以先取某个特值，求出其定值，然后再根据比例定理或者恒等变形求出参数值.此外，表达式为定值的本质是说明变量能够被约掉，只剩下常数.

【例31】已知a、b为非零实数，对于使$\frac{ax+7}{bx+11}$有意义的一切x的值，这个分式为一个定值，则有【B】

A.7a－11b＝0

B.11a－7b＝0

C.7a＋11b＝0

D.11a＋7b＝0

E.7a－11b＝1

【解析】设 $\frac{ax+7}{bx+11}=\mathrm{k}$，化简得$(\mathrm{bk}-\mathrm{a})\mathrm{x}+11\mathrm{k}-7=0$，k 为定值.

所以令$\begin{cases}\mathrm{bk}-\mathrm{a}=0\\ 11\mathrm{k}-7=0\end{cases}$，则$\begin{cases}\mathrm{k}=\frac{7}{11}\\ 7\mathrm{b}=11\mathrm{a}\end{cases}$，从而有 11a－7b＝0.

故选 B.

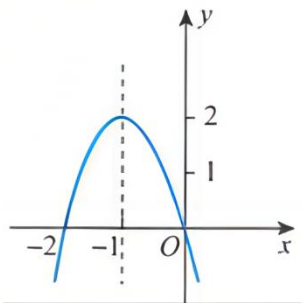
【模块 3－03】一元二次函数

【考点 3－03－01】抛物线

【考向 1】关于图像

【思路】主要观察图像的开口方向，对称轴，与 x 轴交点及 y 轴的交点.

【例 32】由右边图象得出二次函数的解析式为【B】



A. $y=-2x^2-x$

B. $y=-2x^2-4x$

C. $y=-2x^2-3x$

D. $y=-2x^2-5x$

E. $y=2x^2-4x$

【解析】看图时要注意特殊点. 例如顶点和图像与坐标轴的交点.

由图像知抛物线的对称轴为 x＝－1，顶点坐标为(－1, 2)，过点(0, 0)和点(－2, 0).

设解析式为 $y=a(x+1)^2+2$，因为二次函数过原点(0, 0)，所以 a＋2＝0，a＝－2.

故解析式为 $y=-2x^2-4x$.

故选 B.

【例 33】已知抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 与 x 轴相交于点 A(−3，0)，对称轴为 $x = -1$，顶点 M 到 x 轴的距离为 2，此抛物线在 y 轴截距为【B】

A. $-\frac{3}{2}$

B. $\pm\frac{3}{2}$

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{1}{2}$

E. $\pm\frac{1}{2}$

【解析】因为抛物线的对称轴是 x＝−1，又图像经过点 A(−3,0)，所以图像过点 A(−3, 0) 关于对称轴 x＝−1 的对称点 $A'(1, 0)$.
可设解析式为 y＝a(x＋3)(x−1)，把抛物线的顶点 M 的坐标(−1, 2) 或 (−1, −2) 分别代入解析式，解关于 a 的方程，得 a＝$-\frac{1}{2}$或 a＝$\frac{1}{2}$.

故所求函数解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}$或 $y = \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{3}{2}$. 抛物线在 y 轴上的截距为$\pm\frac{3}{2}$.

故选 B.

【考向 2】求最值

【思路】抛物线最重要的内容就是求解表达式的最值，根据对称轴来分析最值.

【例 34】2x(2−x)的最大值为【E】

A.1

B.0.1

C.1.5

D.0.25

E.2

【解析】用二次函数求最值，$y=2x(2-x)=-2(x-1)^2+2$，所以$y_{max}=2$.
故选 E.

【例 35】某商场将进货单价为 18 元的商品，按每件 20 元销售时，每日可销售 100 件，如果每提价 1 元(每件)，日销售量就要减少 10 件，那么把商品的售出价定为____时，才能使每天获得的利润最大.【C】

A.22

B.23

C.24

D.25

E.26

【解析】设该商品的售价定为 x 元/件时，每天可获得 y 元的利润.
即每件提价 x－20 元，每天销售量减少 10(x－20)件，
也就是每天销售量为[100－10(x－20)]件，每件利润 x－18 元.
根据题意，得 $y=(x-18)[100-(x-20)\times 10]=-10(x-24)^2+360(20\leq x\leq 30)$.
因为 $a=-10<0,20\leq 24\leq 30$, 所以当 x=24 时，y 有最大值为 360.
故选 C.

【模块 3－04】幂函数

【考点 3－04－01】幂函数

【考向 1】幂函数的性质及图像

【思路】主要观察幂函数的系数与函数图像.

【例 36】已知幂函数 $f(x)=kx^{\alpha}$的图像过点$\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，则 $k+\alpha=$【E】

A.2

B.$\frac{5}{2}$

C.$\frac{7}{2}$

D.1

E.$\frac{3}{2}$

【解析】已知该函数为幂函数，则系数 k=1.

由题目带入点的坐标，可得：$f(x)=kx^{\alpha}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，解得$\alpha=\frac{1}{2}$.

则 $k+\alpha=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$.

故选 E.

【例 37】已知幂函数 $y=\left(m^2-3m+3\right)x^{m^2-m-2}$的图像不过原点，则 m 有几种取值？【C】

A.0

B.1

C.2

D.3
E.无数个
【解析】已知该函数为幂函数，则系数$m^2-3m+3=1$，解得 $m=1$ 或 $m=2$.

当 $m=1$ 时，$y=x^{1-1-2}=x^{-2}$，此时图像不过原点.

当 $m=2$ 时，$y=x^{4-2-2}=x^0$，此时图像不过原点.

则 m 有两种取值.
故选 C.

【例 38】已知幂函数 $f(x)=x^{\alpha}$和 $g(x)=x^{\beta}$，其中$\alpha>\beta>0$，则有下列说法：
①f(x)和 g(x)图像都过点(1,1)；
②f(x)和 g(x)图像都过点$(-1,1)$；
③在区间$[1,+\infty)$上，增长速度更快的是 f(x)；
④在区间$[1,+\infty)$上，增长速度更快的是 g(x)；
则其中正确命题的有几个？【C】
A.0
B.1
C.2
D.3
E.4
【解析】特值法. 不妨设 $f(x)=x^2$和 $g(x)=x$.
此时 f(x)和 g(x)图像都过点(1,1)但 g(x)不过$(-1,1)$，则命题①正确.
在区间$[1,+\infty)$上，增长速度更快的是 f(x)，则命题③正确.
则正确的命题有两个.
故选 C.

【例 39】在下列函数中，定义域和值域不同的有几个？【B】

①$y=x^{\frac{1}{3}}$；

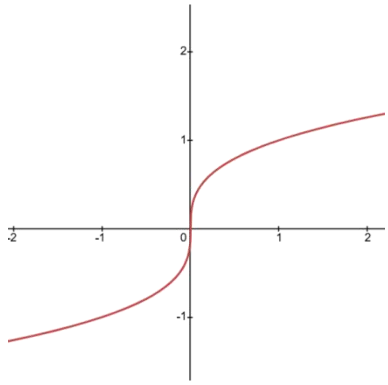
②$y=x^{\frac{5}{3}}$；

③$y=x^{\frac{1}{6}}$；

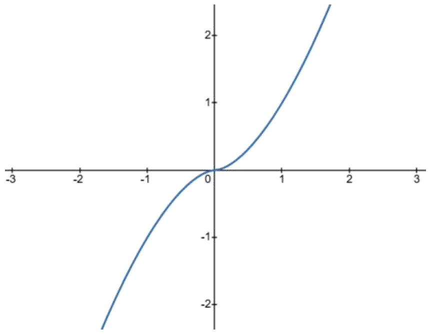
④$y=x^{\frac{2}{3}}$；

A.0
B.1
C.2
D.3
E.4

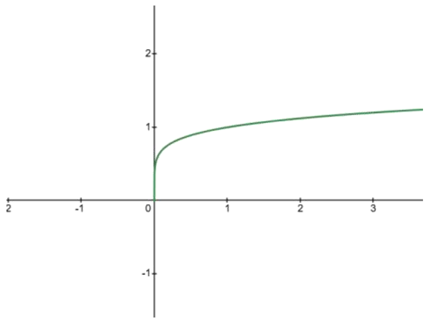
【解析】①$y=x^{\frac{1}{3}}$的图像如下图所示，定义域为 $x\in R$，值域为 $y\in R$，则相同.



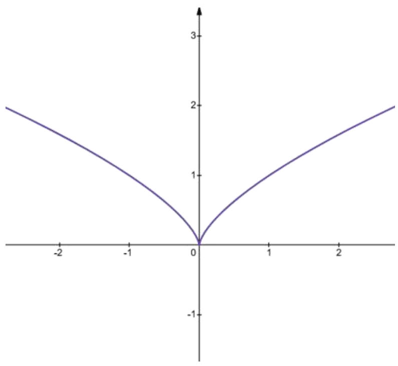
②$y=x^{\frac{5}{3}}$的图像如下图所示，定义域为 $x\in R$，值域为 $y\in R$，则相同.



③$y=x^{\frac{1}{6}}$的图像如下图所示，定义域为 $x\in[0,+\infty)$，值域为 $y\in[0,+\infty)$，则相同.



④$y=x^{\frac{2}{3}}$的图像如下图所示，定义域为 $x\in R$，值域为 $y\in[0,+\infty)$，则不相同.



综上，定义域和值域不同的有一个.
故选 B.

【例 40】幂函数 $y=f(x)$ 的图像过点 $\left(2,\sqrt{2}\right)$，则 $y=x-f(x)$ 的值域中最小的整数为【E】
A.-1
B.1
C.-2
D.2
E.0

【解析】设该幂函数为 $y=f(x)=x^{\alpha}$，则 $2^{\alpha}=\sqrt{2}$，解得 $\alpha=\frac{1}{2}$，幂函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

$y=x-f(x)=x-\sqrt{x}$.
令 $t=\sqrt{x}\geq 0$，则 $y=t^2-t$.

此时 y 的对称轴为 $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{2}$，$y_{min}=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$.

$y=x-f(x)$ 的值域为 $\left(-\frac{1}{4},+\infty\right)$，最小的整数为 0.

故选 E.

【考向 2】幂函数的图像单调性

【思路】根据幂函数的指数不同画出图像观察其单调性.

【例 41】已知函数 $f(x)=\left(x^2-4x+3\right)^{\frac{3}{2}}$ 的增区间中最小的整数为【A】

A.3
B.4
C.5
D.6
E.不存在

【解析】令 $t=x^2-4x+3$，则 $f(x)=t^{\frac{3}{2}}=\sqrt{t^3}$，此时 $t\geqslant 0$.

即 $t=x^2-4x+3\geq 0$，解得 $x\leqslant 1$ 或 $x\geqslant 3$.
当 $x\leqslant 1$ 时，t 单调递减；
当 $x\geqslant 3$ 时，t 单调递增.
根据复合函数同增异减，当 t 单调递增时，$f(x)=\sqrt{t^3}$ 为增函数.
即 $f(x)$ 增区间中最小的整数为 3.
故选 A.

【例 42】已知幂函数 $f(x)=\left(m^2-4m+4\right)x^{m^2-2m}$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 上是增函数，则满足要求的整数 m 有几个？【B】
A.0
B.1
C.2
D.3
E.无数个
【解析】已知该函数为幂函数，则系数 $m^2-4m+4=1$，解得 $m=1$ 或 $m=3$.

当 $m=1$ 时，$f(x)=x^{1-2}=\frac{1}{x}$，单调递减；

当 $m=3$ 时，$f(x)=x^{9-6}=x^3$，单调递增.

则满足要求的整数 m 有 1 个.
故选 B.

【例 43】已知幂函数 $f(x)=\left(8m^2-2m\right)x^m$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，则 $f(4)=$【C】
A.6
B.4
C.2
D.3
E.8

【解析】已知该函数为幂函数，则系数 $8m^2-2m=1$，解得 $m=\frac{1}{2}$ 或 $m=-\frac{1}{4}$.

当 $m=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=x^{\frac{1}{2}}$，单调递增；

当 $m=-\frac{1}{4}$ 时，$f(x)=x^{-\frac{1}{4}}$，单调递减.

则增函数时，$f(4)=4^{\frac{1}{2}}=2$.

故选 C.

【例 44】已知幂函数 $f(x)=\left(a^2-3a+3\right)x^{a+1}$ 为偶函数，则整数 a 有几个取值？【B】

A.0
B.1
C.2
D.3
E.无数个
【解析】已知该函数为幂函数，则系数 $a^2-3a+3=1$，解得 $a=1$ 或 $a=2$.
当 $a=1$ 时，$f(x)=x^2$，偶函数；
当 $a=2$ 时，$f(x)=x^3$，奇函数.
则为偶函数时只有一个取值.
故选 B.

【例 45】已知 $(5-2m)^{\frac{1}{2}}<(m-1)^{\frac{1}{2}}$，则 m 的取值范围包含几个质数？【A】

A.0
B.1
C.2
D.3
E.无数个

【解析】因为 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$ 为增函数且定义域 $x>0$.

则 $0<5-2m<m-1$，解得 $2<m\leq\frac{5}{2}$.

则在 m 的取值范围内没有质数.
故选 A.

【例 46】已知幂函数 $y=(m^2-m-1)x^{m^2-2m-3}$，不是偶函数，m 为整数，当 $x\in(0,+\infty)$ 时为减函数，求 $y(2)=$【B】

A.$\frac{1}{4}$

B.$\frac{1}{8}$

C.$\frac{1}{16}$

D.4
E.8
【解析】已知该函数为幂函数，则系数$m^2-m-1=1$，解得 $m=-1$ 或 $m=2$.

当 $m=-1$ 时，$y=x^{1+2-3}=x^0=1$，关于 y 轴对称，偶函数；

当 $m=2$ 时，$y=x^{4-4-3}=x^{-3}$，奇函数.

则 $y(2)=2^{-3}=\frac{1}{8}$.

故选 B.

【例 47】已知幂函数 $y=x^{m-2}(m\in N)$的图像与 x, y 轴都无交点，且关于 y 轴对称，求 m 有几个取值？【C】
A.0
B.1
C.2
D.3
E.无数个
【解析】已知该幂函数的图像与 x, y 轴无交点，则 $m-2\leq 0\Rightarrow m\leq 2$.
$\because m\in N$，$\therefore m=0,1,2$.

当 $m=0$ 时，$y=x^{-2}$，偶函数，关于 y 轴对称；

当 $m=1$ 时，$y=x^{-1}$，奇函数，不关于 y 轴对称；

当 $m=2$ 时，$y=x^0=1$，关于 y 轴对称.
则关于 y 轴对称时有两个取值.
故选 C.

【例 48】若点$(\sqrt{2},2)$在幂函数 f(x)的图像上，点$\left(-2,\frac{1}{4}\right)$在幂函数 g(x)的图像上，求

$\min\left(f(x), g(x)\right)$的最大值.【D】

A.4

B.3

C.2

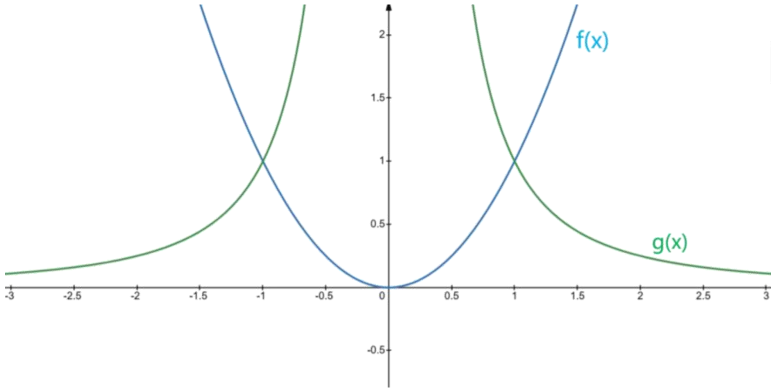
D.1

E.不存在

【解析】设 $f(x)=x^{\alpha}$，$\left(\sqrt{2}\right)^{\alpha}=2$，$\alpha=2$，则 $f(x)=x^2$.

设 $g(x)=x^{\beta}$，$\left(-2\right)^{\beta}=\frac{1}{4}$，$\beta=-2$，则 $g(x)=x^{-2}$.

$f(x)$与 $g(x)$的图像如图所示：



则 $\min\left(f(x), g(x)\right)$的最大值为 1.

故选 D.

第四章 方程与不等式

【模块 4－01】一元一次方程(组)

【考点 4－01－01】一元一次方程(组)

【考向 1】方程

【思路】一元一次方程通过移项变形，转化为标准形式 ax＝b，然后再求解分析.

【例 1】某学生在解方程$\frac{ax+1}{3}-\frac{x+1}{2}=1$时，误将式中的$x+1$看成$x-1$，得出的解为$x=1$，那么$a$的值和原方程的解应是【C】

A. a＝1, x＝7

B. a＝2, x＝5

C. a＝2, x＝7

D. a＝5, x＝2

E. a＝5

【解析】将 x＝1 代入看错的方程中，得到 a＝2；

再将 a＝2 代入原方程$\frac{ax+1}{3}-\frac{x+1}{2}=1$中，得到 x＝7.

故选 C.

【考向 2】方程组

【思路】遇到方程组，可以用消元法求解未知数的值，此外，如果两个方程组同解，那么其中的方程重新组合成方程组后，仍与原方程同解，故本题先将不含参数的两个方程重新组合，求出 x 和 y 的值后，再求出参数值.

【例 2】若$\begin{cases}x+3y=7\\ \beta x+\alpha y=1\end{cases}$与$\begin{cases}3x-y=1\\ \alpha x+\beta y=2\end{cases}$有相同的解，求$(\alpha+\beta)^{2019}=$【A】

A.1

B.－1

C.2

D.－2

E.3

【解析】先由$\begin{cases}x+3y=7\\ 3x-y=1\end{cases}$，得$\begin{cases}x=1\\ y=2\end{cases}$.从而有$\begin{cases}\beta+2\alpha=1\\ \alpha+2\beta=2\end{cases}$,即$\alpha+\beta=1$.

故选 A.

【模块 4－02】一元二次方程

【考点 4－02－01】一元二次方程

【考向 1】方程的概念

【思路】根据方程的元和次的概念求解待定参数.

【例 3】当 m 为何值时，$(m-5)x^{m^2-6m+7}+(m^3+2m^2+m)x+1=0$ 为一元二次方程【A】

A. 1
B. 2
C. －1
D. －2
E. 0

【解析】一元二次方程$\begin{cases} m-5\neq 0 \\ m^2-6m+7=2 \end{cases}$，解得 $m=1$.

故选 A.

【考向 2】方程实根情况

【思路】根据判别式的符号来分析有无实根及实根的个数，注意判别式为 0 时，仍然是两个实根，只不过是相等的两个实根.

【例 4】已知关于 x 的一元二次方程 $k^2x^2-(2k+1)x+1=0$ 有两个相异实根，则 k 的取值范围为【C】

A. $k>\frac{1}{4}$
B. $k\geq\frac{1}{4}$
C. $k>-\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$
D. $k\geq-\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$
E. $k\leq\frac{1}{4}$

【解析】由题意知$\begin{cases} k\neq 0 \\ (2k+1)^2-4k^2>0 \end{cases}$，解得 $k>-\frac{1}{4}$ 且 $k\neq 0$.

故选 C.

【考向 2】韦达定理

【思路】套韦达定理的相关公式和形式进行分析即可. 因为韦达定理对实根和虚根都适用，如果题目要求实根，用完韦达定理记得验证判别式.

【例 5】若方程 $x^2+px+q=0$ 的一个根是另一个根的 2 倍，则 p 和 q 应满足【B】

A. $p^2=4q$
B. $2p^2=9q$
C. $4p=9q^2$
D. $2p=3q^2$
E. $2p=9q^2$

【解析】设 $x_1=a$, $x_2=2a$, 根据韦达定理，则有$\begin{cases}-p=3\alpha\\ q=2\alpha^2\end{cases}$，解得 $2p^2=9q$.

故选 B.

【例 6】设方程$3x^2+mx+5=0$的两个实根x_1，x_2满足$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=2$，则$m$的值为【B】

A. 5
B. -10
C. 10
D. -5
E. 2

【解析】根据韦达定理，$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-\frac{m}{3}}{\frac{5}{3}}=2$，解得 $m=-10$.

故选 B.

【例 7】已知$2x^2-3x-1=0$的根是x_1,x_2，那么$|x_1-x_2|$的值应为【A】

A. $\frac{\sqrt{17}}{2}$

B. $-\frac{\sqrt{17}}{2}$

C. $\frac{\sqrt{17}}{3}$

D. $-\frac{\sqrt{17}}{3}$

E. $\frac{\sqrt{17}}{4}$

【解析】$x_1+x_2=\frac{3}{2}$，$x_1x_2=-\frac{1}{2}$.

$|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{{x_1}^2-2x_1x_2+{x_2}^2}=\sqrt{{x_1}^2+2x_1x_2+{x_2}^2-4x_1x_2}$

$=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\frac{9}{4}-4\times(-\frac{1}{2})}=\sqrt{\frac{9}{4}+2}=\sqrt{\frac{17}{4}}=\frac{\sqrt{17}}{2}$.

故选 A.

【例 8】已知关于 x 的一元二次方程

$x^2-2(m-\frac{1}{2})x+m^2-2=0$ 的两个根是 x_1,x_2，且 $x_1^2-x_1x_2+x_2^2=12$ 求 m 的值 【C】

A. 5 或－1

B. 5

C. －1

D. 0

E. －5

【解析】$x_1+x_2=2m-1$，$x_1x_2=m^2-2$.

$x_1{}^2-x_1x_2+x_2{}^2=x_1{}^2+2x_1x_2+x_2{}^2-3x_1x_2=(x_1+x_2)^2-3x_1x_2=12$.

$(2m-1)^2-3(m^2-2)-12=0$, $4m^2-4m+1-3m^2+6-12=0$,

故有：$m^2-4m-5=0$，解得 $m_1=5$, $m_2=-1$.

但当 $m=5$ 时，原式是 $x^2-9x+23=0$，此时 $\Delta=(-9)^2-4\times23=81-92=-11<0$，方程无实根，故 $m=-1$.

故选 C.

【例 9】已知 m 是正实数，关于 x 的方程 $2x^2-mx-30=0$ 的两根是 x_1，x_2，且 $5x_1+3x_2=0$，则 m 的值为【D】

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

E. 5

【解析】

由根与系数间的关系可得：$x_1+x_2=\frac{m}{2}$①，$x_1x_2=-15$②，已知条件：$5x_1+3x_2=0$③.

由①与③组成的方程组 $\begin{cases}x_1+x_2=\frac{m}{2}\\5x_1+3x_2=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x_1=-\frac{3m}{4}\\x_2=\frac{5m}{4}\end{cases}$.

将方程组的解代入②得 $m=\pm4$，因为 m 是正实数，所以 $m=4$.

故选 D.

【例 10】已知 a、b、c 三数成等差数列，又成等比数列，设 α、β 是方程 $ax^2+bx-c=0$ 的两个根，且 $\alpha>\beta$，求 $\alpha^3\beta-\alpha\beta^3=$【A】

A. $\sqrt{5}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$

D. $\sqrt{7}$

E. $\sqrt{11}$

【解析】由于 a,b,c 三个数既成等差数列，又成等比数列，故 $a=b=c\neq 0$，原方程可化为 $x^2+x-1=0$.
根据韦达定理得：$\alpha+\beta=-1$，$\alpha\beta=-1$，又 $\alpha>\beta$，故 $\alpha^3\beta-\alpha\beta^3=\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=\alpha\beta(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=\alpha\beta(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha-\beta)^2}=\alpha\beta(\alpha+\beta)\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\sqrt{5}$.
故选 A.

【例 11】$3x^2+bx+c=0(c\neq 0)$ 的两个根为 α、β.如果以 $\alpha+\beta$、$\alpha\beta$ 为根的一元二次方程是 $3x^2-bx+c=0$.则 b 和 c 分别为【D】

A. 2, 6
B. 3, 4
C. −2, −6
D. −3, −6
E. −3, 6

【解析】根据韦达定理，在方程 $3x^2+bx+c=0(c\neq 0)$ 中有：$\alpha+\beta=-\frac{b}{3}$，$\alpha\beta=\frac{c}{3}$.

又在方程 $3x^2-bx+c=0$ 中有 $\alpha+\beta+\alpha\beta=\frac{b}{3}$，$(\alpha+\beta)\alpha\beta=\frac{c}{3}$，代入 $\alpha+\beta$，$\alpha\beta$ 得：$\begin{cases}\frac{c}{3}-\frac{b}{3}=\frac{b}{3},\\-\frac{b}{3}\cdot\frac{c}{3}=\frac{c}{3}\end{cases}$

即 $\begin{cases}b=-3\\c=-6\end{cases}$.
故选 D.

【例 12】已知二次方程 $x^2-2ax+10x+2a^2-4a-2=0$ 有实根，求其两根之积的最小值【A】

A. −4
B. −3
C. −2
D. −1
E. −6

【解析】两根之积为 $x_1x_2=2a^2-4a-2$，将它看成开口向上的抛物线，当对称轴为 $a=1$ 时，有最小值−4. 验证当 $a=1$ 时，方程有实根，满足题干.
故选 A.

【考向 4】方程根的符号

【思路】利用韦达定理来分析根的符号，比如两正根，两负根等，此外要注意用完韦达定理要验证判别式，这是命题的陷阱.

【例 13】(条件充分性判断)方程 $4x^2+(a-2)x+a-5=0$ 有两个不等的负实根【D】

（1）5＜a＜6

（2）a＞14.

【解析】由题干 $\begin{cases}\Delta=(a-2)^2-16(a-5)>0\\ x_1+x_2=\frac{2-a}{4}<0\\ x_1x_2=\frac{a-5}{4}>0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a<6\text{ 或 }a>14\\ a>2\\ a>5\end{cases}$，即 $5<a<6$ 或 $a>$ 14. 两个条件均充分，故选 D.

【考向 5】方程根的范围

【思路】遇到根的取值范围题目，要画抛物线图像分析，根据与 x 轴的交点位置来分析，注意不要用韦达定理分析.

【例 14】若关于 x 的二次方程 $mx^2-(m-1)x+m-5=0$ 有两个实根 α 、 β，且满足 $-1<\alpha<0$ 和 $0<\beta<1$，则 m 的取值范围包含____个整数.【A】

A. 0

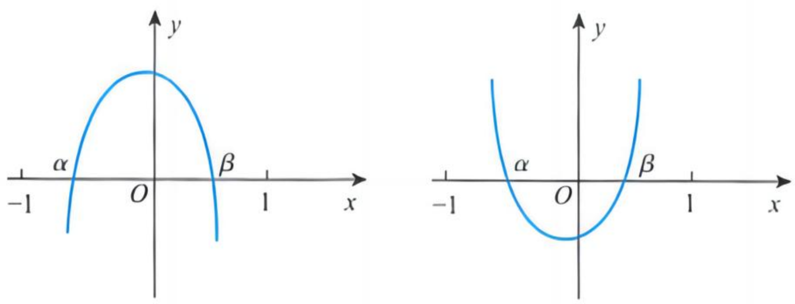
B. 1

C. 2

D. 3

E. 无穷多

【解析】如图，根据根的定理，只要 $\begin{cases}f(-1)f(0)=(3m-6)(m-5)<0\\ f(0)f(1)=(m-5)(m-4)<0\end{cases}$.



a）　　　　b）

解得 4＜m＜5，包含 0 个整数.

故选 A.

【模块 4－03】一次不等式(组)

【考点 4－03－01】一次不等式(组)

【考向 1】不等式性质

【思路】出现不等式大小比较时，要结合不等式性质进行分析，尤其遇到分式不等式或绝对值不等式大小比较时，不要出错.

【例 15】若 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，给出下列不等式：

①$\frac{1}{a+b}<\frac{1}{ab}$；

②$|a|+b>0$；

③$a-\frac{1}{a}>b-\frac{1}{b}$;

④$\ln a^2>\ln b^2$.

其中正确的不等式是【C】

A.①④

B.②③

C.①③

D.②④

E.①②

【解析】特例法.
特例原则：符合条件，尽量简单，一次不够再取一次特值.

因为$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，故可取 $a=-1, b=-2$，显然$|a|+b=1-2=-1<0$，所以②错误；

因为 $\ln a^2=\ln(-1)^2=0$，$\ln b^2=\ln(-2)^2=1n4>0$，所以④错误.
综上所述，可排除 A，B，D 和 E.
故选 C.

【考向 2】一元一次不等式(组)

【思路】解出每一个不等式，根据交集的情况得到不等式组的解集.

【例 16】不等式组$\begin{cases}x-1\le a^2\\x-4\ge 2a\end{cases}$有解，则实数 a 的取值范围包含____个整数.【E】

A.0

B.1

C.2

D.3

E.无穷多

【解析】由$\begin{cases}x-1\le a^2\\x-4\ge 2a\end{cases}$，解得$\begin{cases}x\le a^2+1\\x\ge 2a+4\end{cases}$，即 $2a+4\le a^2+1$，得$a^2-2a-3\ge 0$.

所以 $a\le -1$ 或 $a\ge 3$，包含无穷多个整数.
故选 E.

【模块 4－04】二次不等式

【考点 4－04－01】二次不等式

【考向 1】已知不等式，求解集

【思路】若已知不等式，先分解因式，求出根，再写解集. 对于含有参数的不等式，要先判断两根的大小，再写解集.

【例 17】不等式$x^2-3x+2<0$的解集是【C】

A. $\{x\mid x<-2或x>-1\}$

B. $\{x\mid x<1或x>2\}$

C. $\{x\mid 1<x<2\}$

D. $\{x\mid -2<x<-1\}$

E. $\{x\mid -1<x<2\}$

【解析】原不等式可变形为$(x-1)(x-2)<0$，结合相应二次函数的图像可得，$1<x<2$.
所以不等式 $x^2-3x+2<0$ 的解集是$\{x|1<x<2\}$.
故选 C.

【例 18】一元二次不等式$3x^2-4ax+a^2<0(a<0)$的解集是【C】

A. $\frac{a}{3}<x<a$

B. $x>a或x<\frac{a}{3}$

C. $a<x<\frac{a}{3}$

D. $x>\frac{a}{3}$或$x<a$

E. $a<x<3a$

【解析】由 $3x^2-4ax+a^2<0$，得$(3x-a)(x-a)<0$，又 $a<0$，故解集为 $a<x<\frac{a}{3}$.

故选 C.

【考向 2】已知解集求参数

【思路】若已知不等式的解集，解集的端点值是对应方程的根，代入原方程，就可以求出参数了.

【例 19】若不等式$5x^2-bx+c<0$的解集为$\{x|-1<x<3\}$,则$b+c$ 的值为【B】

A. 5
B. −5
C. −25
D. 10
E. 15

【解析】由于不等式 $5x^2-bx+c<0$ 的解集为$\{x|-1<x<3\}$，可得-1，3 是方程 $5x^2-bx+c=0$ 的两个实数根，故有：$\frac{b}{5}=-1+3$,$\frac{c}{5}=(-1)\times3$,故 $b=10$，$c=-15$，故 $b+c=-5$.

故选 B.

【考向 3】解集为任意实数或空集

【思路】【思路点拨】对于一元二次不等式$ax^2+bx+c<(>)0$解集为任意实数的充要条件是：$\begin{cases}a<(>)0\\ \Delta<0\end{cases}$

【注意】若系数 a 中含有参数，不要忘记讨论系数 a 为零的情况.

【例 20】已知关于 x 的二次不等式：$ax^2+(a-1)x+a-1<0$ 的解集为 R，求 a 的取值范围【C】

A. $a<\frac{1}{3}$

B. $a>\frac{1}{3}$

C. $a<-\frac{1}{3}$

D. $a>-\frac{1}{3}$

E. $a>-3$

【解析】由题意知，要使原不等式的解集为 R，必须$\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$，即$\begin{cases}a<0\\ (a-1)^2-4a(a-1)<0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a<0\\ a>1 或 a<-\frac{1}{3}\end{cases}$. 即$a<-\frac{1}{3}$.

故选 C.

【例 21】已知$(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解集为 R，求实数 a 的取值范围中包含____个整数.【C】

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 无穷多

【解析】先将本题转化为$(a^2-1)x^2-(a-1)x-1<0$ 的解集为 R 分析.

若 $a^2-1=0$，即 $a=1$ 或 $a=-1$ 时，原不等式的解集分别为 R 和$\{x|x<\frac{1}{2}\}$

若 $a^2-1\neq 0$，即 $a\neq\pm 1$ 时，要使原不等式的解集为 R，必须$\begin{cases}a^2-1<0\\ \Delta<0\end{cases}$，即$\begin{cases}a^2-1<0\\ (a-1)^2-4(a^2-1)\times(-1)<0\end{cases}$，解得$-\frac{3}{5}<a<1$.

故所求实数 a 的取值范围是$-\frac{3}{5}<a\leq 1$，从而包含 0 和 1 两个整数.

故选 C.

【例 22】若不等式$\frac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}<1$ 对于一切实数 x 都成立，则实数 k 的范围中包含____个整数.【B】

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

E. 无穷多

【解析】由于分母 $4x^2+6x+3$ 恒大于 0，得到 $2x^2+2kx+k<4x^2+6x+3$.

即 $2x^2+(6-2k)x+3-k>0$, 对于任意 x 恒成立，故$\Delta<0$,
即$(6-2k)^2-4\times 2(3-k)<0$, 解得 $1<k<3$, 包含一个整数 2.
故选 B.

第五章 数 列

【模块 5-01】数列定义

【考点 5-01-01】数列定义

【考向 1】已知 S_n，求 a_n

【思路】根据公式：$a_n=\begin{cases}a_1=S_1 & n=1\\ S_n-S_{n-1} & n\geq 2\end{cases}$ 来求解分析.

【例 1】已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n=n^2+1$，求 a_5 的值.【A】

（A）9　（B）8　（C） 6　（D）4　（E）16

【解析】由公式 $a_5=S_5-S_4=(5^2-1)-(4^2-1)=9$，故选 A.

【例 2】已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 和 S_n 满足 $\log_2(S_n+1)=n+1$， 求 a_6【C】

（A）32　（B）12　（C）64　（D）72　（E）24

【解析】由题中 $\log_2(S_n+1)=n+1$，可得 $S_n+1=2^{n+1}$，故 $S_n=2^{n+1}-1$，从而由公式 $a_6=S_6-S_5=(2^{6+1}-1)-(2^{5+1}-1)=64$，故选 C.

【例 3】已知下列数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n=n^3$，求 $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$ 的值. 【E】

（A）725　（B）775　（C）825　（D）855　（E）875

【解析】由 $a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=S_{10}-S_5=10^3-5^3=875$，故选 E.

【例 4】已知下列数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n=10^n-1$，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【解析】 $n=1, S_1=a_1=10^1-1=9$，

$n\geq 2, a_n=S_n-S_{n-1}=(10^n-1)-(10^{n-1}-1)=9\times 10^{n-1}$.

综上，$a_n=9\times 10^{n-1}$

【考向 2】已知 a_n，求 S_n

【思路】采用公式：$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ 求解，结合对通项裂项，进而采用相消求和法. 这是分解与组合思想在数列求和中的具体应用. 裂项法的实质是将数列中的每项（通项）分解，然后重新组合，使之能消去一些项，最终达到求和的目的.

【例 5】在数列{a_n}中，$a_n = \frac{n}{2}$，又 $b_n = \frac{2}{a_n \cdot a_{n+1}}$，求数列{$b_n$}的前 99 项的和【D】

(A) $\frac{99}{25}$　(B) $\frac{101}{25}$　(C) $\frac{202}{25}$　(D) $\frac{198}{25}$　(E) $\frac{298}{25}$

【解析】$b_n = \frac{2}{\frac{n}{2} \times \frac{n+1}{2}} = \frac{8}{n(n+1)} = 8(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1})$，

故 $b_1 + \ldots + b_{99} = 8 \times [(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \ldots (\frac{1}{99} - \frac{1}{100})] = 8 \times (1 - \frac{1}{100}) = \frac{198}{25}$

故选 D.

【例 6】数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$，若前 n 项的和为 10，则项数 $n =$【B】

(A) 119　(B) 120　(C) 121　(D) 122　（E） 124

【解析】$a_n = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$，从而

$S_n = (\sqrt{2} - 1) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \ldots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \sqrt{n+1} - 1 = 10$，得到 $n = 120$. 故选 B.

（注：公式 $\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+k}} = \frac{1}{k}(\sqrt{n+k} - \sqrt{n})$）

【例 7】求 $S_{99} = \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{99}{100!}$ 的值为【A】

(A) $1 - \frac{1}{100!}$　(B) $2 - \frac{1}{100!}$　(C) $\frac{1}{2} - \frac{1}{100!}$　(D) $1 - \frac{1}{99!}$　(E) $1 - \frac{99}{100!}$

【解析】：$a_n = \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1-1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$，从而裂项相消后的结果为

$1-\frac{1}{100!}$. 故选 A.

【例 8】求 $S_{99}=1\times1!+2\times2!+3\times3!+\cdots+99\times99!$ 的值为【C】

(A) $100!-2$　(B) $100!+1$　(C) $100!-1$　(D) $99!-1$　(E) $99!+2$

【解析】$a_n=n\times n!=(n+1-1)\times n!=(n+1)!-n!$，故选 C.

（注：$n\times n!=(n+1-1)\times n!=(n+1)!-n!$）

【模块 5-02】等差数列

【考点 5-02-01】等差数列

【考向 1】数列的判断及定义

【思路】若三个数 a,b,c 成等差数列，则 b 称为 a 和 c 的等差中项，即 a+c=2b.

【例 9】设 $3^a=4$，$3^b=8$，$3^c=16$，则 a，b，c【B】

（A）是等比数列，但不是等差数列　（B）是等差数列，但不是等比数列

（C）既是等比数列，也是等差数列　（D）既不是等比数列，也不是等差数列

(E)无法确定

【解析】根据计算可知 $3^a\bullet3^c=3^{2b}$，从而 $a+c=2b$，故成等差数列. 故选 B.

【考向 2】等差数列的通项

【思路】根据公式 $a_n=a_1+(n-1)d=a_k+(n-k)d=nd+(a_1-d)$ 分析.

【例 10】下列可以作为等差数列通项的有几个？【D】

(1) $a_n=\frac{1}{n}$，(2) $a_n=\frac{1}{3}$，(3) $a_n=2n$，(4) $a_n=\frac{n^2-1}{n+1}$

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3　（E）4

【解析】(1) 的 $a_n=\frac{1}{n}$ 计算得 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}=\frac{-1}{n(n-1)}$，不是常数，故不是等差数列. (2) 的 $a_n=\frac{1}{3}$ 计算得 $a_n-a_{n-1}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=0$ 是常数，故是等差数列. (3) 的 $a_n=2n$ 计算得

$a_n-a_{n-1}=2n-2(n-1)=2$ 是常数，故是等差数列.(4)的 $a_n=\frac{n^2-1}{n+1}$ 计算得 $a_n-a_{n-1}=(n-1)-(n-2)=1$ 是常数，故是等差数列.故有3个，故选D.

【例11】在等差数列中,若 $a_1=3,a_n=21,d=2,$ 求 n.【A】

（A）10　（B）6　（C）12　（D）15　（E）20

【解析】因为是等差数列，故 $a_n=a_1+(n-1)d=3+2(n-1)=21$，故n=10.故选A.

【例12】若 $\lg 2,\lg(x-1),\lg(x+3)$ 成等差数列,求 x.【E】

（A）2　（B）6　（C）-1或5　（D）2或6　（E）5

【解析】由于成等差数列，故 $2\lg(x-1)=\lg 2+\lg(x+3)$，即 $(x-1)^2=2\times(x+3)$，解得x为-1或5，由于对数的真数必须大于0，故x只能为5.故选E.

【例13】已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，$a_1+a_5=14$，$a_3+a_7=26$，则 $a_3+a_5=$【D】

（A）30　（B）27　（C）23　（D）20　（E）15

【解析】$a_1+a_5=2a_3=14\Rightarrow a_3=7$，$a_3+a_7=2a_5=26\Rightarrow a_5=13$，从而有 $a_3+a_5=20$，故选D.

【例14】一等差数列中，$a_1=2$，$a_4+a_5=-3$，该等差数列的公差是【B】

(A)-2　(B)-1　(C)1　(D)2　(E)3

【解析】$a_4+a_5=a_1+3d+a_1+4d=-3$，从而得到d为-1，故选B.

【例15】数列 $\{a_n\}$ 的前n项和是 $S_n=4n^2+n-2$,则它的通项 a_n 是【E】

（A）8n－3　（B）4n＋1　（C）8n－2　（D）8n－5　（E）$a_n=\begin{cases}a_1=3,n=1\\8n-3,n\geq 2\end{cases}$

【解析】$n=1,S_1=a_1=4+1-2=3$

$$n\geq 2,a_n=S_n-S_{n-1}=(4n^2+n)-[4(n-1)^2+(n-1)]=8n-3$$

综上，故选E.

（注：$S_n = an^2 + bn \to a_n = 2a_n + (b-a)$，$S_n = an^2 + bn + c, c \neq 0$ 时，S_n 不是等差数列的通项公式.只有当 C 为 0 时，S_n 才是等差数列的和式）

【考向 3】等差数列的求和

【思路】根据公式 $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \times n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{d}{2} \cdot n^2 + \left(a_1 - \frac{d}{2}\right)n$ 分析.

【例 16】下列可以作为等差数列前 n 项和的有几个？【B】

(1) $S_n = \frac{1}{n}$，(2) $S_n = \frac{1}{3}$，(3) $S_n = 2n$，(4) $S_n = 2n - 1$，(5) $S_n = 2n^2 - n$，

(6) $S_n = n^2$，(7) $S_n = n^2 - 1$

（A）2　（B）3　（C）4　（D）5　（E）6

【解析】等差数列的和式必为 $S_n = an^2 + bn$ 的形式，从而只有(3),(5),(6)满足，故只有 3 个，故选 B.

【例 17】在 -12 和 6 之间插入 n 个数，使这 $n+2$ 个数组成和为 -21 的等差数列，则 n 为【B】

(A)4　(B)5　(C)6　(D)7　（E）8

【解析】$S_{n+2} = \frac{-12+6}{2} \times (n+2) = -21 \Rightarrow n = 5$，故选 B.

【例 18】在等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_4 = 9, a_9 = -6$，则满足 $S_n = 54$ 的所有 n 的值为【A】

（A）4 或 9　（B）4　（C）9　（D）3 或 8　（E）8

【解析】：由 $a_4 = 9$ 和 $a_9 = -6$ 可得 d 为-3，从而 $S_n = 18n - \frac{3n(n-1)}{2} = 54$，从而得出 n 为 4 或 9. 故选 A.

【例 19】在等差数列 $\{a_n\}$ 中，S_n 表示前 n 项和，若 a_1=13，$S_3 = S_{11}$，则 S_n 的最大值是【B】

(A)42　(B)49　(C)59　(D)133　(E)不存在

【解析】由 $S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$ 为过原点的抛物线，其对称轴为 $-\frac{a_1-\frac{d}{2}}{2\times\frac{d}{2}}=\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d}$，由

$S_3=S_{11}$ 可得对称轴为 $\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d}=7$，又 $a_1=13$，从而 d 为 -2，从而最大值为

$S_7=7\times13+\frac{7\times6}{2}\times(-2)=49$. 故选 B.

【20】等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_5<0$，$a_6>0$，且 $a_6>|a_5|$，S_n 是前 n 项之和，则【C】

（A）S_1,S_2,S_3 均小于 0, 而 $S_4,S_5,\cdots\cdots$ 均大于 0

（B）$S_1,S_2,\cdots\cdots,S_5$ 均小于 0, 而 $S_6,S_7,\cdots\cdots$ 均大于 0

（C）$S_1,S_2\cdots\cdots,S_9$ 均小于 0, 而 $S_{10},S_{11},\cdots\cdots$ 均大于 0

（D）$S_1,S_2,\cdots\cdots,S_{10}$ 均小于 0, 而 $S_{11},S_{12},\cdots\cdots$ 均大于 0

（E）无法确定

【解析】由题 $a_5+a_6=a_1+a_{10}>0$，从而 $S_{10}=\frac{a_1+a_{10}}{2}\times10>0$，而

$S_9=\frac{a_1+a_9}{2}\times9=9a_5<0$. 故选 C.

【考向 4】非常规手段求和

【思路】数列的项的序号本应取正整数，但有时能虚拟一个小数 0.5，求解会更简便．尤其将公式 $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n$ 转化为 $S_n=na_{\frac{n+1}{2}}$（n 为偶数时，虚拟小数），比如 $S_{10}=10a_{5.5}$．同样，有 $a_m+a_n=2a_{\frac{m+n}{2}}$，比如 $a_3+a_8=2a_{5.5}$．尤其是在做选择题，不需要参考解题过程评分，利用这样的方式来处理更准更快.

【例 21】等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $S_{14}=70$，$S_{16}=144$，则这个数列 $\{a_n\}$ 的公差是【C】

(A) 1　　(B) 2　　(C) 4　　(D) 5　　(E) 6

【解析】$S_{14}=14a_1+\frac{14\times13}{2}d=70 S_{16}=16a_1+\frac{16\times15}{2}d=144$，$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，得到

d = 4 或由$\begin{cases}\frac{S_n}{n}=a_1+\frac{n-1}{2}d.\\ \frac{S_m}{m}=a_1+\frac{m-1}{2}d\end{cases}$，$\frac{S_n}{n}-\frac{S_m}{m}=\frac{n-m}{2}d$，$\frac{S_{16}}{16}-\frac{S_{14}}{14}=d$，$-\frac{70}{14}=d$，$9-5=4=d$.故选 C.

【例 22】等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，且$a_5+a_8=16$，$S_{18}=90$，则$S_{32}=$【E】

(A)-16 (B)-32 (C)-54 (D)-58 (E)-64

【解析】$a_5+a_8=2a_{6.5}=16\Rightarrow a_{6.5}=8S_{18}=18a_{9.5}=90\Rightarrow a_{9.5}=5$，得到 $d=-1.S_{32}=32a_{16.5}=32\times(5-7)=-64$. 故选 E.

【考向 5】等差数列元素的性质

【思路】若 m,n,l,$k\in Z^+$，m+n=l+k,则$a_m+a_n=a_l+a_k$.

【例 23】已知等差数列$\{a_n\}$中，a_1 和 a_{10} 是方程$x^2-3x-5=0$的两根，那么$a_3+a_8=$【C】

（A）3 或-3 （B）4 （C）3 （D）-3 （E）-4

【解析】由韦达定理，$x_1+x_2=-\frac{b}{a}.x_1x_2=\frac{c}{a}$，$a_3+a_8=a_1+a_{10}=3$。故选 C.

【例 24】在等差数列中，若$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=48$, 求S_{12}. 【C】

（A）96 （B）48 （C）144 （D）160 （E）240

【解析】$a_2+a_3+a_{10}+a_{11}=4a_{\frac{26}{4}}=4a_{6.5}=48$，$a_{6.5}=12.S_{12}=12a_{6.5}=12\times12=144$. 故选 C.

【例 25】在等差数列中，已知$a_7+a_8=21$，则$S_{14}=$【C】

（A）132 （B）144 （C）147 （D）154 （E）157

【解析】$a_7+a_8=2a_{7.5}=21.S_{14}=14a_{7.5}=14\times\frac{21}{2}=7\times21=147$。故选 C.

【考向 6】等差数列求和的性质

【思路】对于等差数列，$S_n,S_{2n}-S_n,S_{3n}-S_{2n},\cdots$仍为等差数列，其公差为$n^2d$.

【例 26】若在等差数列中前 5 项和$S_5=15$，前 15 项和$S_{15}=120$，则前 10 项和S_{10}为【D】

(A)40 (B)45 (C) 50 (D)55 (E)60

【解析】$\begin{matrix}S_5=5a_3=15\\ S_{15}=15a_8=120\end{matrix}$，得到$\begin{matrix}a_3=3\\ a_8=8\end{matrix}$，得到 $d=1$，$S_{10}=10a_{5.5}=10\times(3+2.5)=55$. 故选 D.

【例 27】已知等差数列$\{a_n\}$，S_n为前n项和，$S_4=30,S_8=90$，则公差 d 为【C】

（A）$\frac{8}{15}$ （B）$\frac{15}{2}$ （C）$\frac{15}{8}$ （D）$\frac{17}{8}$ （E）$\frac{15}{4}$

【解析】$S_4,S_8-S_4,\cdots$ 公差为4^2d，得到 $16d=30\mathrm{d}=\frac{15}{8}$，$\frac{S_8}{8}-\frac{S_{14}}{4}=\frac{8-4}{2}d\frac{45}{4}-\frac{30}{4}=2d=\frac{15}{4}$，

得到$d=\frac{15}{8}$. 故选 C.

【模块 5-03】等比数列

【考点 5-03-01】等比数列

【考向 1】数列的判断及定义

【思路】若三个数 a,b,c 成等比数列，则 b 称为 a 和 c 的等比中项，即 ac=b².

【例 28】若$2,2^x-1,2^x+3$成等比数列，则$x=$ 【A】

（A）$\log_2 5$ （B）$\log_2 6$ （C）$\log_2 7$ （D）3 （E）4

【解析】$2\times(2^x+3)=(2^x-1)^2$，令$t=2^x(t>0)$，$2(t+3)=(t-1)^2=t^2-2t+1$，$t^2-4t-5=0$，得到 $\mathrm{t}=-1$ 或 5，即$2^x=5$，从而$x=\log_2^5$. 故选 A.

【考向 2】等比数列的通项

【思路】$a_n=a_1q^{n-1}=a_kq^{n-k}=\frac{a_1}{q}q^n$

【注意】等比数列中任何一个元素不能为 0，公比也不能为 0.

【例 29】下列可以作为等比数列通项的有几个？【D】

(1) $a_n=n^3$， (2) $a_n=3^n$， (3) $a_n=\frac{1}{3}$， (4) $a_n=\frac{2^n}{3}$， (5) $a_n=3^{-n}$，

(6) $a_n=(-1)^n$， (7) $a_n=2^n-1$

（A）2 （B）3 （C）4 （D）5 （E）6

【解析】根据等比数列的定义$\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，其特征是$a_n=$常数×指数，所以只有（2）（3）（4）（5）（6）是等比数列的通项，故选 D。

【例 30】若$\{a_n\}$是等比数列，下面四个命题中正确命题的个数是【E】

①数列$\{a_n^2\}$也是等比数列　　②数列$\{a_{2n}\}$也是等比数列

③数列$\{\frac{1}{a_n}\}$也是等比数列　　④数列$\{|a_n|\}$也是等比数列

(A)0 个　(B)1 个　(C)2 个　(D)3 个　（E）4 个

【解析】由a_n为等比数列，从而$\frac{a_{n+1}^2}{a_n^2}=(\frac{a_{n+1}}{a_n})^2=q^2$；$\frac{a_{2(n+1)}}{a_{2n}}=q^2$；$\frac{\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{a_n}}=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{q}$；$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=|\frac{a_{n+1}}{a_n}|=|a|$。故选 E。

【例 31】等比数列$\{a_n\}$中,若$a_4a_7=-512,a_3+a_8=124,$且公比为$q\in Z$，求a_{10}.【C】

（A）124　（B）64　（C）512　（D）-124　（E）-512

【解析】$\left.\begin{matrix}a_4a_7=a_3a_8=-512\\a_3+a_8=124\end{matrix}\right\}$为方程$x^2-124x-512=0$，方程的两根为-4, 128。

若$a_3=-4,a_8=128(q\in\mathbb{Z})$，得出$\frac{a_8}{a_3}=\frac{128}{-4}=-32=q^5$，从而 $q=-2$ 符合。

但当$a_3=128a_8=-4$求出公比不是整数，舍去。

从而$a_{10}=a_8q^2=128\times(-2)^2=512$。故选 C。

【例 32】已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_9=130$，$a_3-a_9=-126$，求公比 q【A】

（A）2 或-2　（B）2　（C）3　（D）-3　（E）-2

【解析】$a_3+a_9=130,a_3-a_9=-126$，得出$a_3=2$，$a_9=128$。$\frac{a_9}{a_3}=\frac{128}{2}=64=q^6$，得到 $q=\pm2$. 故选 A。

【考向 3】等比数列的求和

【思路】根据公式$S_n=\begin{cases}na_1 & q=1\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1-a_{n+1}}{1-q} & q\neq1\end{cases}$求解.

【注意】分为 q=1 和 q≠1 两种情况.

【例 33】下列可以作为等比数列前 n 项和的有几个？【B】

(1) $S_n=\frac{1}{3}$，　(2) $S_n=2n$，　(3) $S_n=2n-1$，　(4) $S_n=2^n$，　(5) $S_n=2^n-1$，

(6) $S_n=2^n+1$，　(7) $S_n=3\left(2^n-1\right)$

（A）2　（B）3　（C）4　（D）5　（E）6

【解析】等比数列的前 n 项和的特征是：

（1）当 q 为 1，$S_n=na_1$，为一次函数。

（2）当 q ≠ 1，$S_n=\frac{a_1}{1-q}\times(1-q^n)=k(1-q^n)$。

从而只有（2）（5）（7）符合，故选 B。

【例 34】已知 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_2+S_5=2S_8$，求公比 q【D】

（A）1 或-2　（B）2　（C）1 或 $-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$　（D）$-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$　（E）-2 或 $-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$

【解析】

（1）当 q 为 1，$2a_1+5a_1=2\times 8a_1$，得到 $a_1=0$ 舍去

（2）当 q ≠ 1，$\frac{a_1(1-q^2)}{1-q}+\frac{a_1(1-q^5)}{1-q}=\frac{2a_1(1-q^8)}{1-q}$，$1-q^2+1-q^5=2(1-q^8)$，$q^2+q^5=2q^8$。

$1+q^3=2q^6$，令 $t=q^3$，从而 $q^3=-\frac{1}{2}.q=-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}=-\frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{8}}=-\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$。故选 D。

【考向 4】等比数列元素的性质

【思路】若 m,n,l,$k\in Z^+$，m+n=l+k,则 $a_m\cdot a_n=a_l\cdot a_k$.

【例 35】等比数列 $\{a_n\}$ 中，a_3，a_8 是方程 $3x^2+2x-18=0$ 的两个根，则 $a_4a_7=$【C】

（A）-9　（B）-8　（C）-6　（D）6　（E）8

【解析】由韦达定理 $a_4a_7=a_3a_8=\frac{-18}{3}=-6$，故选 C。

【例 36】若等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2a_4+2a_3a_5+a_2a_8=25$，且 $a_1>0$，则 $a_3+a_5=$【B】

(A)8　(B) 5　(C) 2　(D)2　(E) -5

【解析】$a_3^2+2a_3a_5+a_5^2=25$，$(a_3+a_5)^2=25\Rightarrow a_3+a_5=\pm 5$。由 $a_1>0$，得：$a_3+a_5=5$。故选 B。

【考向 5】等比数列求和的性质

【思路】若 S_n 为等比数列前 n 项和，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$…仍为等比数列，其公比为

q^n.

【例 37】在等比数列$\{a_n\}$中，已知$S_n=36, S_{2n}=54$，则$S_{3n}=$【A】

（A）63　（B）68　（C）76　（D）89　（E）92

【解析】由等比数列性质，得到S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$...仍然是等比，设$S_n=36$，从而$S_{2n}-S_n=54-36=18$，从而$S_{3n}-S_{2n}=9$，从而$S_{3n}=54+9=63$，故选 A.

【例 38】已知等比数列$\{a_n\}$，S_n为前n项和，$S_4=30, S_8=150$，则公比 q 为【C】

（A）± 2　（B）$\sqrt{2}$　（C）$\pm\sqrt{2}$　（D）$\pm\frac{1}{2}$　（E）$-\sqrt{2}$

【解析】S_4，S_8-S_4...仍为等比，公比为q^4. 由$S_4=30$，$S_8-S_4=150-30=120$，$q^4=4=2^2 q=\pm\sqrt[4]{4}$，$q^2=2\longrightarrow q=\pm\sqrt{2}$.故选 C.

第三部分 几 何

第六章 平面几何

【模块 6-01】平行直线

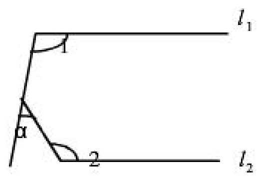
【考点 6-01-01】平行直线

【考向 1】求角度

【思路】注意平行线与其它特殊图形结合的所形成的角，不仅具有平行线角的关系，同时也要考虑到特殊图形角的关系.

【例 1】如图，$l_1 // l_2, \angle 1 = 105^O, \angle 2 = 140^O$, 则$\angle \alpha =$ 【D】

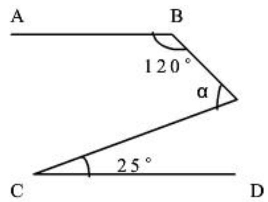
（A） 50^O　（B） 55^O　（C） 60^O　（D） 65^O　（E） 70^O



【解析】属于平面几何中的拐点模型，$180° - \alpha = 360° - (\angle 1 + \angle 2)$，得到$\alpha = 65°$.故选 D.

【例 2】如图$AB // CD, \angle \alpha =$ 【C】

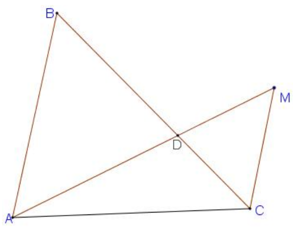
（A） 75^O　（B） 80^O　（C） 85^O　（D） 90^O　（E） 95^O



【解析】属于平面几何中的拐点模型，由$\angle \alpha = 25° + (180° - 120°) = 85°$.故选 C.

【例 3】 如图，AB=AC, $\angle BAC = 80^o$, AD=BD, $CM // AB$交 AD 延长线于点 M，则$\angle M$的大小是____度.【C】

（A）30　（B）40　（C）50　（D）60　（E）70



【解析】由图，$\angle B=\angle ACB=\frac{180°-80°}{2}=50°$.而由内错角，$\angle BAM=\angle M$，$BD=AD\Rightarrow\angle BAM=\angle B=50°$，从而$\angle M=50°$.故选 C.

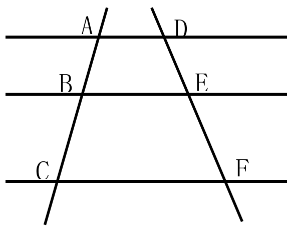
【考向 2】求长度

【思路】根据平行直线的线段比例公式进行分析.

【例 4】如图，如果 AB，BC，DE，EF 四条线段成比例，且 AB=2，BC=3，DE=4，那么 EF=【D】

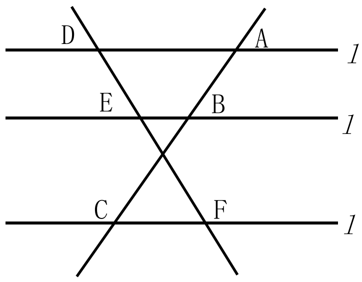
（A）3　（B）4　（C）5　（D）6　（E）8

【解析】$EF=2\times BC=6$，故选 D.



【例 5】已知直线 $l_1//l_2//l_3$，DE=6，EF=9，AB=5，求 AC 的长．【C】

（A）10　（B）12　（C）12.5　（D）14　（E）16



【解析】$\frac{DE}{EF}=\frac{AB}{BC}$，$\frac{6}{9}=\frac{5}{BC}$，$BC=7.5$，$AC=AB+BC=5+7.5=12.5$.故选 C.

【模块 6-02】三角形

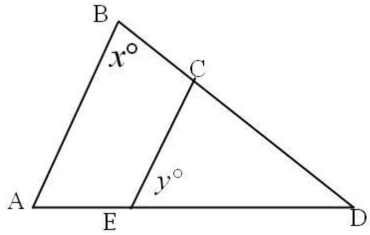
【考点 6-02-01】角与边

【考向 1】求角度

【思路】注意平行线与其它特殊图形结合的所形成的角，不仅具有平行线角的关系，同时也要考虑到特殊图形角的关系.

【例 6】在图形中若 $AB//CE$，$CE=DE$，且 $y=45°$，则 $x=$【C】

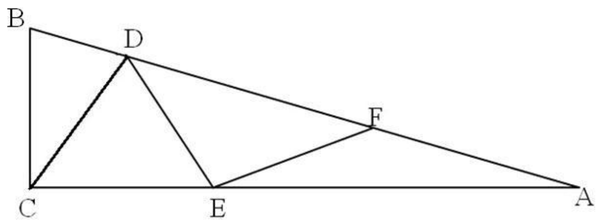
(A) 45^0 (B) 60^0 (C) 67.5^0 (D) 112.5^0 (E) 135^0



【解析】$CE=DE\Rightarrow\angle C=\angle D$，再由同位角相等：$AB//CE\Longrightarrow\angle C=\angle B=x$，而由内角和可得$y+2x=180°$，$x=\frac{180°-45°}{2}=67.5°$.故选 C.

【例 7】如图，直角ΔABC中$\angle C$为直角，点E和D、F分别在直角边AC和斜边AB上，且$AF=FE=ED=DC=CB$，则$\angle A=$【C】

(A) $\frac{\pi}{8}$ (B) $\frac{\pi}{9}$ (C) $\frac{\pi}{10}$ (D) $\frac{\pi}{11}$ (E) $\frac{\pi}{12}$



【解析】$\angle A+\angle B=\frac{\pi}{2}$，设$\angle A=x$，则$\angle DEC=3x$，$\angle BDC=4x$，$\angle B=4x$，则$\angle A+\angle B=5\angle A=\frac{\pi}{2}$，$\angle A=\frac{\pi}{10}$.故选 C.

【考向 2】三边关系

【思路】根据三角形三边的关系来分析三角形的要求，任意两边之和大于第三边，两边之差小于第三边，只要满足其中一个就可以构成三角形.

【例 8】有长度分别为 1,2,3,4,5,6,7 的七根短棒，任取三根，可以组成几个三角形？【A】

(A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17

【解析】利用列举法，因为要构成三角形，故要满足任意两边之和大于第三边，任意两边之差小于第三边。

(1) 当最小边是 2 时，只有 3 和 4、4 和 5、5 和 6、6 和 7 这 4 种情况

(2) 当最小边是 3 时，只有 4 和 5、4 和 6、5 和 6、5 和 7、6 和 7 这 5 种情况

(3) 当最小边是 4 时，只有 5 和 6、5 和 7、6 和 7 这 3 种情况

(4) 当最小边是 5 时，只有 6 和 7 这一种情况

故选 A.

【例 9】若三角形的三边长度为整数，且周长为 11，其中一条边长为 3，则在所有可组成的三角形中，最大的边长为【C】

(A)3 (B)4 (C)5 (D)6 (E)7

【解析】因为边长为整数，故$a+b=8, |a-b|<3$.则通过列举法只有 3 和 5、4 和 4 这两种情况. 故选 C.

【例 10】要使三条线段$3a-1,4a+1,12-a$能组成一个三角形，求a的取值范围. 【B】

（A）$1<a<4$ （B）$\frac{3}{2}<a<5$ （C）$\frac{3}{2}<a<4$

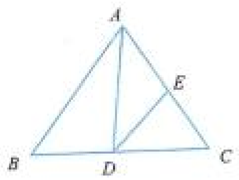
（D）$0<a<5$ （E）$a>5$

【解析】$\begin{cases} 7a>12-a \\ 2a+11>4a+1 \\ 3a+13>3a-1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a>\frac{3}{2} \\ a<5 \end{cases} \rightarrow \frac{3}{2}<a<5.$，故选 B.

【例 11】$\triangle ABC$中，$AB=5$，$AC=3$，当$\angle A$在$(0,\pi)$中变化时，该三角形BC边上的中线长取值的范围是【B】

(A)$(0,5)$ (B)$(1,4)$ (C)$(3,4)$ (D)$(2,5)$ (E)$(3,5)$

【解析】根据三角形三边关系，如图：



可得$AE=\frac{5}{2}$，$DE=\frac{3}{2}$.，而$AE-DE<AD<AE+DE$，$1<AD<4$，故选 B.

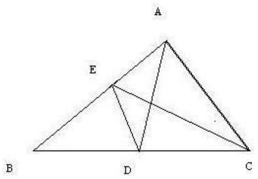
【考点 6-02-02】三角形面积

【考向 1】利用底高关系计算面积

【思路】当两个三角形等高时，面积之比等于底之比；当两个三角形同底时，面积之比等于高之比；当两个三角形同底等高时，面积相等.

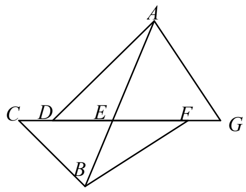
【例 12】下图中，若ΔABC的面积为 1，ΔAEC，ΔDEC，ΔBED的面积相等，则ΔAED的面积为【B】

（A）$\frac{1}{3}$ （B）$\frac{1}{6}$ （C）$\frac{1}{5}$ （D）$\frac{1}{4}$ （E）$\frac{2}{5}$



【解析】$S_{\Delta AEC}=S_{\Delta DEC}=S_{\Delta BED}=\frac{1}{3}$.，$S_{\Delta BDE}=S_{\Delta CDE}\Longrightarrow$D 为中点，$S\Delta ABD=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}$，$S_{\Delta AED}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.故选 B.

【例 13】如图，已知 $CD=5$，$DE=7$，$EF=15$，$FG=6$，线段 AB 将图形分成两部分，左边部分面积是 38，右边部分面积是 65，那么三角形 ADG 的面积是【A】
(A)40　　(B)35　　(C)33　　(D)32　　(E)31



【解析】整体法，设$S_{\Delta ADE}=x.S_{\Delta BCE}=y$，$\begin{cases}x+y=38\\3x+\frac{5}{4}y=65.\end{cases}\Rightarrow x=10.y=28,S_{\Delta ADG}=4x=40.$
故选 A.

【考向 2】三边关系

【思路】根据三角形三边的关系来分析三角形的要求，任意两边之和大于第三边，两边之和小于第三边，只要满足其中一个就可以构成三角形.

【例 14】若三角形有两边长为 4 与 6，三角形的面积为 $6\sqrt{2}$，则这两边的夹角为【B】
(A)30°　　(B)45° 或 135°　　(C)60° 或 120°　　(D)75°　　(E)90°

【解析】$S=\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin c=6\sqrt{2}$，$\sin c=\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 C=45° 或 135°，故选 B.

【例 15】如果三角形有两边长为 4 和 6，第三边长度在变化，则三角形面积的最大值为【D】
(A)18　　(B)16　　(C)14　　(D)12　　(E)10

【解析】把边长的变化转化为角度的变化，$S_{max}=\frac{1}{2}\times4\times6\times\sin90°=12$，故选 D.

【考向 3】利用三边计算面积

【思路】当已知三角形的三条边时，可以套公式求面积: $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$，其中
$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

【例 16】若三角形的三边长为 7,8,9，则三角形的面积为【D】

(A) $16\sqrt{2}$ (B) $12\sqrt{3}$ (C) $18\sqrt{3}$ (D) $12\sqrt{5}$ (E) $18\sqrt{5}$

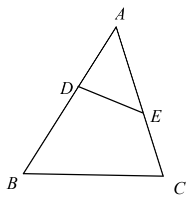
【解析】利用海伦公式，$p=\frac{7+8+9}{2}=12$，$S=\sqrt{12\times5\times4\times3}=12\sqrt{5}$.故选 D.

【考向 4】利用鸟头定理计算面积

【思路】如果出现共角或等角的三角形，可以利用鸟头定理求解：共角三角形的面积比等于对应角(相等角或互补角)两夹边的乘积之比.

【例 17】如图在$\triangle ABC$中，D,E分别是AB,AC上的点，且$AD:AB=2:5$，$AE:AC=4:7$，$S_{\triangle ADE}=16$，求$\triangle ABC$的面积.【D】

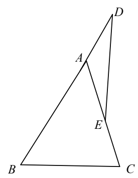
(A) 56 (B) 65 (C) 66 (D) 70 (E) 72



【解析】$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AD\times AE}{AB\times AC}=\frac{2}{5}\times\frac{4}{7}=\frac{8}{35}$，$S_{\Delta ADE}=16\Longrightarrow S_{\Delta ABC}=70$.故选 D.

【例 18】如图在$\triangle ABC$中，D在BA的延长线上，E在AC上，且$AB:AD=5:2$，$AE:EC=3:2$，$S_{\triangle ADE}=12$，求$\triangle ABC$的面积.【E】

(A) 30 (B) 35 (C) 43 (D) 48 (E) 50



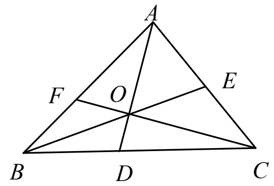
【解析】$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{AD\times AE}{AB\times AC}=\frac{2\times3}{5\times5}=\frac{6}{25}$，而$S_{\Delta ADE}=12$，故$S_{\Delta ABC}=50$. 故选 E.

【考向 5】利用燕尾定理计算面积

【思路】如果出现三角形内一点与各顶点的连线，则采用燕尾定理分析.

【例 19】如图，三角形ABC中，$BD:DC=4:9$，$CE:EA=4:3$，求$AF:FB$.【E】

(A) 27:17 (B) 27:14 (C) 25:16 (D) 28:15 (E) 27:16



【解析】$\frac{BD}{CD}=\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOC}}$，$\frac{AE}{CE}=\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta BOC}}$，$\frac{AF}{BF}=\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}}$，$\frac{CE}{AE}=\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOB}}$，$\frac{BD}{CD}\times\frac{CE}{AE}\times\frac{AF}{BF}=\frac{S_{\Delta AOB}}{S_{\Delta AOC}}\times\frac{S_{\Delta BOC}}{S_{\Delta AOB}}\times\frac{S_{\Delta AOC}}{S_{\Delta BOC}}=1$，

故$\frac{4}{9}\times\frac{4}{3}\times\frac{AF}{BF}=1\Rightarrow\frac{AF}{BF}=\frac{27}{16}$. 故选 E.

【考点 6-02-03】形状判断

【考向 1】三角形的判断

【思路】主要借助三角形的内角关系以及三边关系所满足的条件，结合三角形的性质进行判断三角形的形状. 重点掌握等边三角形、等腰三角形、直角三角形、等腰直角三角形的特征. 要判断三角形的形状，题目已知条件是三角形的边长，所以关键就是利用恒等变形，找到a、b、c 的关系就可以判断了.

【例 20】ΔABC 的三边 a,b,c 适合 $1+\frac{b}{c}=\frac{b+c}{b+c-a}$，则此三角形是【A】

(A)以 a 为腰的等腰三角形　　(B)以 a 为底的等腰三角形

(C)等边三角形　　(D)直角三角形　　(E)钝角三角形

【解析】$\frac{b+c}{c}=\frac{b+c}{b+c-a}\Rightarrow b+c-a=c\Rightarrow b=a$，故选 A.

【例 21】ΔABC的三边为 a、b、c，且满足 $4a^2+4b^2+13c^2-8ac-12bc=0$，则 ΔABC 是【B】

(A)直角三角形　　(B)等腰三角形　　(C)等边三角形

(D)等腰直角三角形　　(E)钝角三角形

【解析】将 $4a^2-8ac+4c^2+4b^2-12bc+9c^2=0$ 分组配合，利用非负性，$4(a-c)^2+(2b-3c)^2=0$，$\Rightarrow a=c$且 $2b=3c$，故选 B.

【例 22】ΔABC 的三边分别是 a,b,c，若 $a^2+2bc=b^2+2ac=c^2+2ab=27$，那么 ΔABC 是【E】

（A）等腰三角形　　（B）锐角三角形　　（C）钝角三角形

（D）直角三角形　　（E）等边三角形

【解析】$\begin{cases}a^2+2bc=27\\b^2+2ac=27\\c^2+2ab=27\end{cases}\longrightarrow(a+b+c)^2=27\times3=81$，$a+b+c=9$，$a^2-b^2+2bc-2ac=0.(a-b)(a+b-2c)=0$，可得$a=b$或$a+b=2c$.

（1）当$a=b$时，$\begin{matrix} c+2a=9. \\ a^2+2ac=27 \\ c^2+2a^2=27 \end{matrix} \to \begin{matrix} c^2-2ac+a^2=0 \\ c=a \end{matrix}$，得到$\Rightarrow a=b=c=3$

（2）当$a+b=2c$时，$3c=9\Rightarrow c=3$，$a+b=6$，$\begin{matrix} b^2+6a=27 \\ 9+2ab=27. \end{matrix}$可得$ab=9$，$\Rightarrow a=b=c=3.$

故选 E.

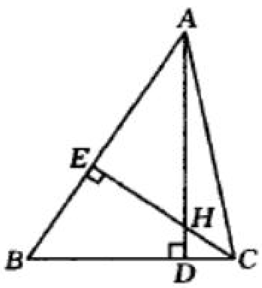
【考点 6-02-04】全等与相似

【考向 1】三角形全等

【思路】遇到折叠、对称或翻转时，采用全等分析.

【例 23】如图，在ΔABC中，$AD\perp BC$于 D，$CE\perp AB$于 E，AD 与 CE 交于点 H，若 EH=EB=3，AE=4，那么 CH=【A】

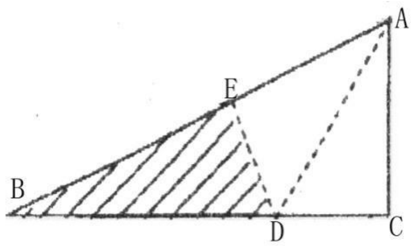
（A）1　（B）$\frac{4}{3}$　（C）$\frac{5}{3}$　（D）$\sqrt{3}$　（E）2



【解析】$\begin{cases} \angle 1+\angle 2=90^\circ \\ \angle 3+\angle 4=90^\circ \\ \angle 2=\angle 3 \end{cases}\Rightarrow \angle 1=\angle 4$，又$EH=EB$，得:$\Delta AEH\cong\Delta CEB$，$\Rightarrow AE=CE=4$，$CH=CE-EH=4-3=1$.故选 A.

【例 24】直角三角形ABC的斜边$AB=13$厘米，直角边$AC=5$厘米，把AC对折到AB上去与斜边相重合，点C与点E重合，折痕为AD（如图），则图中阴影部分的面积为【B】

（A）20　（B）$\frac{40}{3}$　（C）$\frac{38}{3}$　（D）14　（E）12



【解析】$\begin{matrix} BC=12 \\ \Delta ACD\cong\Delta AED. \end{matrix}$，$AE=AC=5$，$BE=13-5=8$，由相似$\Delta BDE\sim\Delta BAC$，$\frac{DE}{AC}=\frac{BE}{BC}\Rightarrow$

$\frac{DE}{5}=\frac{8}{12}\Rightarrow DE=\frac{10}{3}$，$S_{\Delta BDE}=\frac{1}{2}\times\frac{10}{3}\times 8=\frac{40}{3}$.故选 B.

【考向 2】三角形相似

【思路】当出现平行时，采用相似分析. 对于相似图形，面积比等于相似比的平方.

【例 25】下列命题中哪些是正确？【D】

（A）所有的直角三角形都相似.

（B）所有的等腰三角形都相似.

（C）所有的平行四边形都相似.

（D）所有的等边三角形都相似.

（E）所有的梯形都相似

【解析】A 项，至少两个三角板就不相似，故错误。

B 项，显然不对，等腰三角形的顶角不同时就不相似

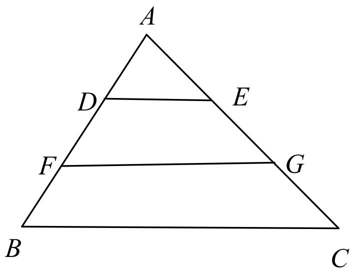
C、E 项，同样是当角度不同时，不相似

D 项，因为等边三角形的三个内角一定都是 60°，所以一定相似，故选 D

【例 26】如图，$\triangle ABC$ 中，DE，FG，BC 互相平行，$AD=DF=FB$，

则 $S_{\triangle ADE}:S_{四边形DEGF}:S_{四边形FGCB}=$ 【A】

(A)1:3:5　(B)1:2:5　(C)1:3:4　(D)1:3:6　(E)2:3:5



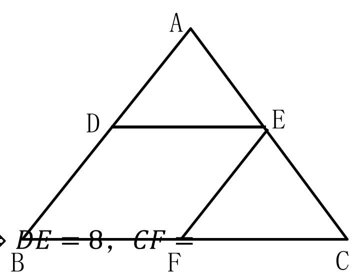
【解析】$\Delta ADE,\Delta AFG,\Delta ABC$ 相似，$S_{\Delta ADE}:S_{\Delta AFG}:S_{\Delta ABC}=AD^2:AF^2:AB^2=1:2^2:3^2=1:4:9$，故$S_{\Delta ADE}:S_{DEGF}:S_{FGCB}=1:3:5$. 故选 A.

【例 27】在ΔABC中，D，E，F分别是 AB，AC，BC 上的点，

且 $DE// BC$，$EF// AB$，$AD:DB=2:3$，$BC=20$，

求 CF 的长. 【E】

（A）15　（B）$\frac{40}{3}$　（C）$\frac{38}{3}$　（D）14　（E）12



【解析】由 DEFB 为平行四边形，$\Delta ADE\sim\Delta ABC$，$\frac{DE}{BC}=\frac{AD}{AB}=\frac{2}{5}$，$BC=20\Rightarrow DE=8$，$CF=BC-BF=20-8=12$ ·故选 E

【模块 6-03】四边形

【考点 6-03-01】四边形

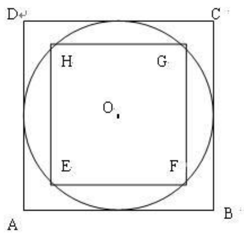
【考向 1】正方形

【思路】四边边长均为a，四个内角都是 90°,面积为$S=a^2$，周长为$C=4a$.

【例 28】已知正方形$ABCD$四条边与圆O内切，而正方形$EFGH$是圆O的内接正方形.

已知正方形$ABCD$的面积为1，则正方形$EFGH$的面积是【B】

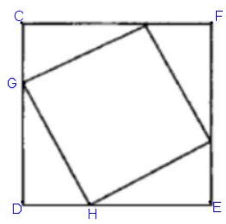
（A）$\frac{2}{3}$　（B）$\frac{1}{2}$　（C）$\frac{\sqrt{2}}{2}$　（D）$\frac{\sqrt{2}}{3}$　（E）$\frac{1}{4}$



【解析】$AB=\sqrt{2}EG=1$，$EG=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$S_{EFGH}=\frac{1}{2}$，故选 B.

【例 29】一个周长为 20 的正方形内接与一个周长为 28 的正方形，在内的正方形的一个顶点与在外的正方形的一个顶点的最大距离为【E】

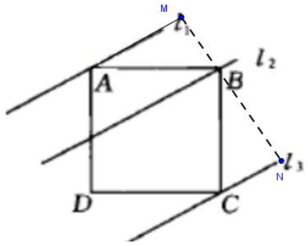
（A）3　（B）4　（C）5　（D）$\sqrt{58}$　（E）$\sqrt{65}$



【解析】设$DG=x$，则$HE=x$，$DH=7-x$，$x^2+(7-x)^2=5^2$，$x=4$.则最大：$GE=\sqrt{4^2+7^2}=\sqrt{65}$.故选 E.

【例 30】如图，四边形 ABCD 是正方形，l_1,l_2,l_3分别经过 A,B,C 三点，且$l_1//l_2//l_3$，若l_1与l_2距离为 5，l_2与l_3距离为 7，则正方形 ABCD 的面积为【B】

（A）70　（B）74　（C）140　（D）144　（E）148



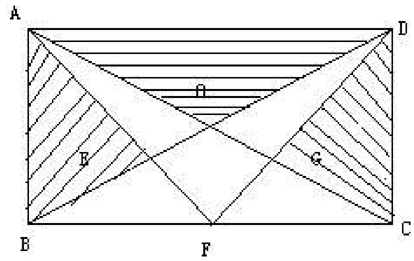
【解析】$BM=5\cdot BN=7.\Delta ABM\cong\Delta BCN$，$AM=BN=7$. 则$S_{ABCD}=AB^2=7^2+5^2=74$. 故选 B.

【考向 2】长方形

【思路】平方差公式，要掌握该公式的两种应用，一个是出现根号的有理化，另外就是长串数字的乘法化简.

【例 31】如图，长方形 ABCD 的两条边长分别为 8 和 6，四边形 OEFG 的面积是 4，则阴影部分的面积为【B】

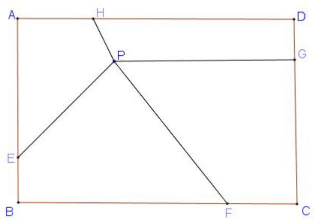
（A）32 （B）28 （C）24 （D）20 （E）16



【解析】$S_{ABCD}=6\times 8=48.S_{\Delta AOD}=\frac{1}{4}S_{ABCD}=12$，$S_a+S_b=S_{\Delta AOF}-S_{\Delta AOO}-S_{OEFG}=24-12-4=8.S_{阴}=\frac{3}{4}\times 48-8=36-8=28$. 故选 B.

【例 32】如图，在矩形 ABCD 中，点 E,F,G,H 分别是 AB,BC,CD,DA 上，点 P 在矩形 ABCD 内，若 AB=4,BC=6,AE=CG=3,BF=DH=4,四边形 AEPH 的面积为 5，则四边形 PFCG 的面积为【C】

（A）5 （B） 6 （C） 8 （D） 9 （E）10



【解析】$S_{\Delta APH}+S_{\Delta PCF}=\frac{1}{2}\times 2\times h_1+\frac{1}{2}\times 2\times h_2=h_1+h_2=4.S_{\Delta AEP}+S_{\Delta PCG}=\frac{1}{2}\times 3\times h_3+\frac{1}{2}\times 3\times h_4=\frac{3}{2}\underbrace{(h_3+h_4)}=9$，$S_{AEPH}+S_{PFCG}=4+9=13$，可得$S_{\text{PFCG}}=8$. 故选 C.

【例 33】某用户要建一个长方形的羊栏，羊栏的周长为 120, 羊栏对角线的长不超过 50, 则羊栏的面积最小值为【E】

（A）450 （B）500 （C）520 （D）540 （E）550

【解析】$a+b=60.\sqrt{a^2+b^2}\le 502$，$ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$，$S=ab=\frac{(a+b)^2-(a^2+b^2)}{2}\ge\frac{60^2-50^2}{2}=550$.故选 E.

【考向 3】菱形

【思路】菱形两对角线互相垂直平分，面积等于对角线之积的一半.

【例 34】已知菱形两条对角线长分别为 10 和 24，则菱形的面积为【B】

（A）110　（B）120　（C）130　（D）140　（E）160

【解析】$S=\frac{10\times24}{2}=120$，故选 B.

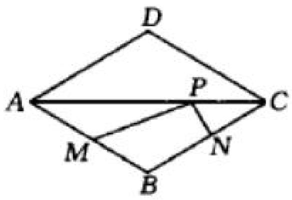
【例 35】已知菱形的周长为 52，一条对角线长为 24，则菱形的面积为【B】

（A）110　（B）120　（C）130　（D）140　（E）160

【解析】边长：$\frac{52}{4}=13$，则$S=\frac{10\times24}{2}=120$，故选 B.

【例 36】如图，在菱形 ABCD 中，两条对角线长分别是 6 和 8，点 P 是 AC 上一动点，M,N 分别 AB,BC 的中点，则 PM+PN 的最小值为【C】

（A）3　（B）4　（C）5　（D）6　（E）7



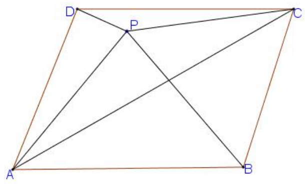
【解析】利用对称，设 N 关于 AC 的对称点为 N’，则$PM+PN=PM+PN'\ge MN'=AD=5$.故选 C.

【考向 4】平行四边形

【思路】平行四边形两组对边平行且相等，平行四边形的核心点是对角线. 此外，如果没有其他要求，可以将平行四边形特殊成矩形或正方形来找答案.

【例 37】如图，已知 P 是平行四边形 ABCD 内一点，且 $S_{\Delta PAB}=5, S_{\Delta PAD}=2$, 则 $S_{\Delta PAC}=$ 【B】

（A）2　（B）3　（C）3.5　（D）4　（E）5



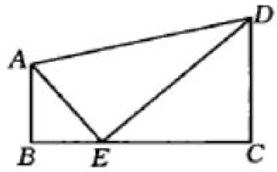
【解析】$S_{\Delta ABD}=2+5=7$，$S_{\Delta AOB}=\frac{7}{2}=3.5$，$S_{\Delta AOP}=5-3.5=1.5$，则$S_{\Delta PAC}=3$.故选 B.

【考向 5】梯形

【思路】根据梯形的面积公式和性质进行分析，注意直角梯形和等腰梯形两个特殊梯形.

【例 38】如图，$AB \perp BC$于B，$CD \perp BC$于C，$\angle BAD$与$\angle CDA$的平分线恰好交于 BC 上的点 E, AD=8, BC=6, 则四边形 ABCD 的面积为【B】

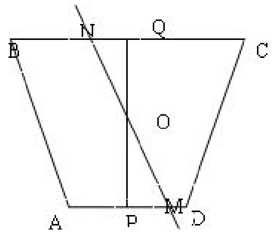
（A）12　　（B）24　　（C）36　　（D）48　　（E）96



【解析】$AB//CD\&\colon \angle BAD+\angle CDA=180°$，$\angle 2\&=\angle 3=90°$，$S_{ABCD}=\frac{AB+CD}{2}\times BC=\frac{8}{2}\times 6=24$，故选 B.

【例 39】如图，在梯形 ABCD 中，AD//BC，点 P，Q 分别平分 AD、BC，点 O 平分 PQ，过点 O 作直线与 AD 相交于 M，与 BC 相交与 N，则四边形 AMNB 和 MDCN 的面积比是？【B】

（A）$\frac{1}{2}$　　（B）1　　（C）$\frac{2}{3}$　　（D）$\frac{3}{2}$　　（E）2



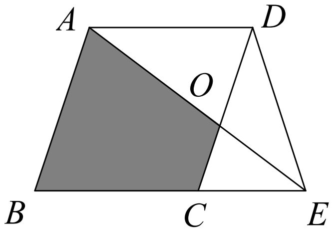
【解析】$S_{AMNB}=\frac{S_{ABD}}{2}+S_{\Delta POM}-S_{\Delta NOQ}$，而$S_{\Delta POM}=S_{\Delta NOQ}$（全等），故选 B.

【考向 6】其他四边形

【思路】遇到其他四边形，可以分割为三角形来求解，或者利用特殊四边形分析.

【例 40】已知$ABCD$是平行四边形，$BC:CE=3:2$，三角形ODE的面积为 6. 则阴影部分的面积是【B】

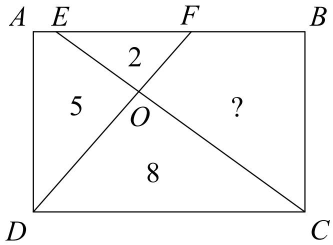
(A)20　　(B)21　　(C)22　　(D)24　　(E)26



【解析】连接 AC，ACED 为梯形，AD = BC，$AD:CE = 3:2$，$S_{\Delta ODE} = 6$，$S_{\Delta ACD} = 6 + 9 = 15$，$S_{\Delta ABC} = 15$，$S_{阴} = 15 + 6 = 21$.故选 B

【例 41】如图，长方形 $ABCD$ 被 CE 、DF 分成四块，已知其中 3 块的面积分别为 2、5、8，那么余下的四边形 $OFBC$ 的面积为【B】

(A)10　(B)9　(C)8　(D)7　(E)6



【解析】连接 CF,DE，则 EDCF 为梯形，$S_{\Delta EOD} = S_{\Delta COF} = 4$，$S_{\Delta CDF}\& = 8 + 4 = 12 = \frac{1}{2}S_{ABCD}$，$S_{ABCD} = 24$，$S_{OFBC} = 24 - 2 - 5 - 8 = 9$.故选 B.

【考向 7】多边形

【思路】平方差公式，要掌握该公式的两种应用，一个是出现根号的有理化，另外就是长串数字的乘法化简.

【例 42】边长为 2 的正六边形面积为【D】

（A）$2\sqrt{3}$　（B）$3\sqrt{3}$　（C）$4\sqrt{3}$　（D）$6\sqrt{3}$　（E）$8\sqrt{3}$

【解析】$S = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 4 = 6\sqrt{3}$，故选 D.

第七章 解析几何

【模块 7－01】平面直角坐标系

【考点 7－01－01】两点相关公式

【考向 1】两点中点公式

【思路】根据两点中点公式$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$分析.

【例 1】已知三个点 $A(x,5),B(-2,y),C(1,1)$,若点 C 是线段 AB 的中点,则【A】

$(A)x=4,y=-3$
$(B)x=0,y=3$
$(C)x=0,y=-3$
$(D)x=-4,y=-3$
$(E)x=3,y=-4$

【解析】C 是 AB 的中点，根据中点坐标公式，则有$\begin{cases}1=\frac{1}{2}(x-2)\\1=\frac{1}{2}(5+y)\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=4\\y=-3\end{cases}$.

故选 A.

【考向 2】两点距离公式

【思路】根据两点距离公式$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ 分析.

【例 2】已知线段 AB 的长为 12,点 A 的坐标是 $(-4,8)$,点 B 横纵坐标相等,则点 B 的坐标为【D】

$(A)(-4,-4)$
$(B)(8,8)$
$(C)(4,4)$或$(8,8)$
$(D)(-4,-4)$或$(8,8)$
$(E)(4,4)$或$(-8,-8)$

【解析】设 B 点坐标为(x, x)，根据题意有$\sqrt{(x+4)^2+(x-8)^2}=12$，解得 $x=-4$ 或 $x=8$.
故选 D.

【例 3】等边三角形 ABC的两个顶点 $A(2,0),B(5,3\sqrt{3})$,则另一个顶点的坐标是【D】

$(A)(8,0)$
$(B)(-8,0)$

$(C)(1,-3\sqrt{3})$

$(D)(8,0)$或$(-1,3\sqrt{3})$

$(E)(6,0)$或$(-1,3\sqrt{3})$

【解析】

设 C 点坐标为(x，y)，则有$\sqrt{(x-2)^2+y^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-3\sqrt{3})^2}=\sqrt{(5-2)^2+(3\sqrt{3})^2}$.

解得$\begin{cases}x=8\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=-1\\y=3\sqrt{3}\end{cases}$.

故选 D.

【模块 7—02】直线

【考点 7—02—01】直线核心参数

【考向 1】倾斜角及斜率

【思路】注意特殊的倾斜角，比如 90°，注意斜率的正负及大小变化情况.

【例 4】关于倾斜角及斜率，下列说法有几个正确？【B】

(1)倾斜角越大，斜率越大；

(2)当倾斜角为 145°时，斜率为 1；

(3)当倾斜角小于 90°时，倾斜角越大，斜率越大；

(4)当倾斜角大于 90°时，倾斜角越大，斜率越小.

A.0

B.1

C.2

D.3

E.4

【解析】

(1) 错误，比如倾斜角为 150° 比 45° 的斜率小；

(2) 错误，倾斜角为 135° 时，斜率为—1；

(3) 正确；

(4) 错误，倾斜角大于 90° 时，倾斜角越大，斜率越大.

故选 B.

【例 5】若直线 L 与直线 $y=1$、$x=7$ 分别交于点 P、Q，且线段 PQ 的中点坐标为$(1,-1)$，则直线 L 的斜率为【B】

A.$\frac{1}{3}$

B. $-\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $-\frac{2}{3}$

E. $\frac{3}{2}$

【解析】设 P，Q 两点的坐标分别为(m，1)，(7，n)，由中点坐标可列式得：$\begin{cases}\frac{m+7}{2}=1\\ \frac{1+n}{2}=-1\end{cases}$，

解得$\begin{cases}m=-5\\ n=-3\end{cases}$. 所以所求直线斜率为$\frac{-3-1}{7+5}=-\frac{1}{3}$.

故选 B.

【考点 7—02—02】直线方程

一、考点讲解

【考向 1】直线方程

【思路】平方差公式，要掌握该公式的两种应用，一个是出现根号的有理化，另外就是长串数字的乘法化简.

【例 6】下列说法正确的有几个？【C】

(1)过原点的直线可以用截距式表示.

(2)水平的直线不可以用截距式表示.

(3)竖线可以用点斜式表示.

(4)所有的直线都可以用一般式表示.

A.0

B.1

C.2

D.3

E.4

【解析】

(1)错误，过原点的直线因为截距为 0，所以不可以用截距式表示，

(2)正确，水平的直线在 x 轴无截距，所以不可以用截距式表示.

(3)错误，竖直的直线的斜率不存在，所以不可以用点斜式表示.

(4)正确，所有的直线都可以用一般式表示.

故选 C.

【例 7】已知 $A(-1,2)$，$B(2,4)$，$C(x,3)$，且 A、B、C 三点共线，则 $x=$【D】

A. $\frac{1}{5}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

E.1

【解析】

设经过 A，B 两点的直线方程为 $y=ax+b$，将 A，B 两点的坐标分别代入方程，得：$2=-a+b$，$4=2a+b$，解得 $a=\frac{2}{3}$，$b=\frac{8}{3}$，即过 A，B 两点的直线方程为 $y=\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$.

因此当 $y=3$ 时，$x=\frac{1}{2}$.

故选 D.

【例 8】过点(5,8)且截距互为相反数的直线方程为【E】

A. $x-y+3=0$

B. $x+y+3=0$

C. $-x-y+3=0$

D. $x-y-3=0$

E. $x-y+3=0$ 或 $8x-5y=0$

【解析】设截距分别为 a 和 $-a$，根据截距式列式得 $\frac{5}{a}+\frac{8}{-a}=1$，解得 $a=-3$，所以直线方程为 $x-y+3=0$；

同时还需要考虑直线经过原点的情况，利用点斜式，设直线方程为 $8=5k$，解得直线方程为 $8x-5y=0$.

故选 E.

【例 9】过(1,－3)和(3,1)两个点的直线在 y 轴上的截距为【E】

A.5

B.－2

C.－3

D.－4

E.－5

【解析】过(1,－3)和(3，1)两个点的直线方程为：$\frac{y+3}{1+3}=\frac{x-1}{3-1}$.

故直线在 y 轴上的截距为-5.
故选 E.

【例 10】直线$2x-3y+12=0$在两个坐标轴的截距之积为【B】

A.－48

B.－24

C.24

D.－12

E.12

【解析】直线 $2x-3y+12=0$ 在 x 轴的截距为-6，在 y 轴的截距为 4，故两个坐标轴的截距之积为-24.
故选 B.

【考向 2】直线过象限

【思路】根据直线的斜率和截距情况，画图分析.记住结论：k＞0 时，直线必过一三象限；k＜0 时，直线必过二四象限.

【例 11】直线 L：$ax+by+c=0$必不通过第三象限.【A】
（1）$ac\le 0$，$bc<0$
（2）$ab>0$，$c<0$
【解析】

条件(1)，由$bc<0$知，$b\neq 0$，有 $y=-\frac{a}{b}x+\frac{-c}{b}$，$-\frac{a}{b}\leqslant 0$，$\frac{-c}{b}>0$，当 $a\neq 0$ 时，直线不过第三象限，当 $a=0$ 时，直线过第一、二象限，不过第三象限，故条件（1）充分.

同理，条件(2)，$-\frac{a}{b}<0$，$c<0$，而$\frac{-c}{b}$不确定，故条件（2）不充分.

故选 A.

【考点 7－02－03】两直线位置关系

【考向 1】两直线的平行

【思路】根据斜率相等来分析平行，注意斜率为 0 和斜率不存在的情况.

【例 12】已知直线$l_1:(k-3)x+(4-k)y+1=0$，与直线$l_2:2(k-3)x-2y+3=0$ 平行，则 k 的值是【E】

A.3

B.5

C.1

D.－1

E.3 或 5

【解析】分情况讨论，当 $k=3$ 时，两直线斜率为 0，是水平线，满足平行；

当 $k\neq 3$ 时，由两直线平行，斜率相等，得$\frac{3-k}{4-k}$=$k-3$，解得 $k=5$.

故选 E.

【考向 2】两直线的垂直

【思路】当两直线的斜率之积为－1，或者斜率互为负倒数时，两直线垂直.注意斜率为 0 或斜率不存在的情况.

【例 13】$(m+2)x+3my+1=0$ 与 $(m-2)x+(m+2)y-3=0$ 相互垂直.【D】

（1）$m=\frac{1}{2}$

（2）$m=-2$

【解析】

条件(1)，当 $m=\frac{1}{2}$时，两直线的斜率分别为$-\frac{5}{3}$、$\frac{3}{5}$，有$-\frac{5}{3}\times\frac{3}{5}=-1$，故两直线互相垂直，故条件（1）充分；

条件(2)，当 $m=-2$ 时，两直线分别为平行于 x 轴、y 轴的直线，显然是垂直的，故条件（2）充分.

故选 D.

【例 14】若直线 $mx+3y+5=0$ 与直线 $nx-2y+1=0$ 互相垂直，那么符合条件的正整数解有____组.【D】

A.1

B.2

C.3

D.4

E.5

【解析】两直线垂直，则有 $mn-6=0$，解得 $mn=6$，所以就有$\begin{cases}m=2\\n=3\end{cases}$或$\begin{cases}m=1\\n=6\end{cases}$或$\begin{cases}m=3\\n=2\end{cases}$或$\begin{cases}m=6\\n=1\end{cases}$这四组解. 故选 D.

【例 15】已知点 $A(1,-2),B(m,2)$，且线段 AB 的垂直平分线的方程是 $x+2y-2=0$,则实

数 m＝【A】

A.3

B.4

C.5

D.6

E.7

【解析】AB 的中点($\frac{1+m}{2}$，0)在直线 $x+2y-2=0$ 上，所以$\frac{1+m}{2}+0-2=0$，得 $m=3$.

故选 A.

【例 16】已知直线 L 的方程为$x+2y-4=0$，点 A 的坐标为(5,7)，过 A 点作直线垂直于 L，则垂足的横坐标为【C】

A.6
B.5
C.2
D.－2
E.－1

【解析】设垂足的坐标为(x_0,y_0)，根据斜率关系，且垂足在直线 L 上，可得$\begin{cases}\frac{y_0-7}{x_0-5}=2\\ x_0+2y_0-4=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}y_0=1\\ x_0=2\end{cases}$. 故选 C.

【考向 3】两直线的相交

【思路】当两条直线的斜率不相等时，两直线相交.另外，会求两直线的交点坐标.

【例 17】$(m+1)x+3y+1=0$ 与 $2x+my-3=0$ 相交.【B】

（1）$m>\frac{1}{2}$

（2）$m<-4$

【解析】两直线相交，则斜率不相等，故有：$-\frac{m+1}{3}\neq-\frac{2}{m}$，即 $m\neq2$ 且 $m\neq-3$，故条件(2)充分，条件（1）不充分. 故选 B.

【例 18】$2x+3y+4=0$ 与 $3x+y-1=0$ 的交点到原点的距离为【D】

A.$\sqrt{2}$

B.$\sqrt{3}$

C.2

D. $\sqrt{5}$

E. $\sqrt{7}$

【解析】两直线相交，解方程组得到交点坐标(1，－2)，根据两点距离公式得到(1，－2)到原点的距离为$\sqrt{5}$. 故选 D.

【考点 7—02—04】点与直线

【考向 1】点与直线的位置关系

【思路】先把直线化为 $y=kx+b$，再将点代入直线进行判断.

【例 19】已知直线 L 的方程为 $x+2y-4=0$，点 A 的坐标为(5—m,m)，若 A 点在直线 L 的上方，求 m 的取值范围.【B】

A. $m>1$
B. $m>-1$
C. $m>-2$
D. $m>-\frac{1}{2}$
E. $m>\frac{1}{2}$

【解析】$x+2y-4=0 \Rightarrow y=2-\frac{x}{2}$，点 A 的坐标为$(5-m, m)$，若 A 点在直线 L 的上方，

故 $m>2-\frac{5-m}{2}$，解得 $m>-1$.

故选 B.

【考向 2】点到直线距离

【思路】先把直线方程化为一般式，再套点到直线的距离公式.

【例 20】已知点 $C(2,-3), M(5,5), N(-3,-1)$,则点 C 到直线 MN 的距离等于【A】

$(A)\frac{23}{5}$

$(B)\frac{22}{5}$

$(C)\frac{21}{5}$

$(D)\frac{19}{5}$

$(E)\frac{18}{5}$

【解析】直线 MN 的方程为 $3x-4y+5=0$.

故 C 到直线 MN 的距离为 $d=\frac{|2\times3+(-3)\times(-4)+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{23}{5}$.

故选 A.

【考向 3】平行直线距离

【思路】套两平行直线的距离公式求解.注意要先统一两条直线的 x 和 y 的系数后，再进行求解.

【例 21】l_1：$3x-4y+2=0$；l_2：$6x-8y+9=0$，那么 l_1 与 l_2 之间的距离为【D】

$(A)\frac{1}{6}$

$(B)\frac{1}{4}$

$(C)\frac{1}{3}$

$(D)\frac{1}{2}$

E.1

【解析】先将 l_2 转化为：$3x-4y+4.5=0$，再由公式得到：$d=\frac{|4.5-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{1}{2}$.

故选 D.

【模块 7—03】圆

【考点 7—03—01】圆的方程

【考向 1】圆的方程

【思路】注意圆的方程要求，以及半圆的方程形式.

【例 22】已知 $x^2+y^2-4x+6y-m=0$ 表示一个圆，那么 m 的取值范围是【B】

A. $m<12$

B. $m<13$

C. $m\le12$

D. $m\le13$

E. $m>13$

【解析】圆的标准方程 $x^2+y^2+ax+by+c=0$，要满足的条件是 $a^2+b^2-4c>0$，代入解得 $m<13$.

故选 B.

【例 23】若圆的方程是 $x^2+y^2=1$，则它的右半圆（在第一象限和第四象限内的部分）的方程是【B】

A. $y-\sqrt{1-x^2}=0$

B. $x-\sqrt{1-y^2}=0$

C. $y+\sqrt{1-x^2}=0$

D. $x+\sqrt{1-y^2}=0$

E. $x^2+y^2=\dfrac{1}{2}$

【解析】由 $x^2+y^2=1$ 得 $x=\pm\sqrt{1-y^2}$，右半圆为 $x\geq 0$，则右半圆方程为 $x-\sqrt{1-y^2}=0$.

故选 B.

【考向 2】圆与坐标轴的交点

【思路】令 y＝0，可求出圆与 x 轴的交点；令 x＝0，可求出圆与 y 轴的交点.当圆与坐标轴只有一个时，就变成相切了.

【例 24】圆 $x^2+(y-1)^2=4$ 与 x 轴的两个交点是【D】

A. $(-\sqrt{5},0)$，$(\sqrt{5},0)$

B. $(-2,0)$，$(2,0)$

C. $(0,-\sqrt{5})$，$(0,\sqrt{5})$

D. $(-\sqrt{3},0)$，$(\sqrt{3},0)$

E. $(-\sqrt{2},-\sqrt{3})$，$(\sqrt{2},\sqrt{3})$

【解析】令 $y=0$，则 $x^2=3$，解得 $x=\pm\sqrt{3}$.

故选 D.

【例 25】以 $P(-2,3)$ 为圆心，且与 y 轴相切的圆的方程是【B】

A. $(x-2)^2+(y+3)^2=4$

B. $(x+2)^2+(y-3)^2=4$

C. $(x-2)^2+(y+3)^2=9$

D. $(x+2)^2+(y-3)^2=9$

E.以上答案均不正确

【解析】因为圆与 y 轴相切，所以圆心到 y 轴的距离为半径，所以 $r=2$，故圆的方程为 $(x+2)^2+(y-3)^2=4$.

故选 B.

【考点 7—03—02】与圆相关的位置关系

【考向 1】点与圆位置关系

【思路】先将点代入圆的方程，再进行判断

【例 26】若点 P(2m,m)在圆 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 内，则 m 的取值范围为【A】

A. $\frac{1}{5}<m<1$

B. $-\frac{1}{5}<m<1$

C. $m<\frac{1}{5}$或m>1

D. $-1<m<\frac{1}{5}$

E. $-1<m<-\frac{1}{5}$

【解析】

点 P(2m，m)在圆 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 内，

得 $4m^2+m^2-4\cdot 2m+2m+1<0$，化简得 $5m^2-6m+1<0$，解得$\frac{1}{5}<m<1$.

故选 A.

【考向 2】直线与圆位置关系

【思路】先求圆心到直线的距离 d，然后比较 d 和 r 的大小进行判断. 比较重要的位置关系是相切，此外当相交时，要会用勾股定理求弦长，弦长＝$2\sqrt{r^2-d^2}$.

【例 27】直线 $y=k(x+2)$ 是圆 $x^2+y^2=1$的一条切线，求 k 的值.【D】

A. $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

E. $\pm\sqrt{3}$

【解析】由 $d=\frac{|0-k(0+2)|}{\sqrt{1+k^2}}=r=1$，得 $k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.
故选 D.

【例 28】已知圆 C 的圆心是直线 $x-y+1=0$ 与 x 轴的交点，且圆 C 与直线 $x+y+3=0$ 相切，则圆 C 的方程为【B】

A. $(x-1)^2+y^2=2$

B. $(x+1)^2+y^2=2$

C. $(x+1)^2+y^2=4$

D. $x^2+(y+1)^2=2$

E. $x^2+(y-1)^2=4$

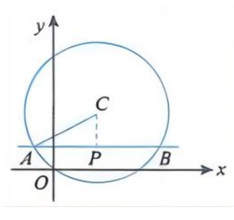
【解析】令 $y=0$ 代入直线方程，即可得圆 C 的圆心为 $(-1,0)$，圆 C 与直线 $x+y+3=0$ 相切，说明圆心到该直线的距离就等于半径，即 $r=d=\frac{|-1+0+3|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}$，所以得圆 C 的方程为 $(x+1)^2+y^2=2$.
故选 B.

【例 29】直线 $x+2y-5+\sqrt{5}=0$ 被圆 $x^2+y^2-2x-4y=0$ 截得的弦长为【C】

A. 1
B. 2
C. 4
D. 6

E. $4\sqrt{6}$

【解析】圆的方程化为 $(x-1)^2+(y-2)^2=5$，圆心 $C(1,2)$，半径 $r=\sqrt{5}$.



如图取弦 AB 的中点 P，连接 CP，则 CP 垂直于 AB，圆心到直线 AB 的距离 $d = CP = \frac{|1+4-5+\sqrt{5}|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 1$，在三角形 ACP 中，$|AP| = \sqrt{r^2 - d^2}$=2，故直线被圆截得的弦长是 4.
故选 C.

【例 30】若直线 $x-y+1=0$ 与圆 $(x-a)^2+y^2=2$ 有公共点，则实数 a 的取值范围是【B】

A. $[-4,1]$

B. $[-3,1]$

C. $[1,3]$

D. $[1,4]$

E. $[-3,3]$

【解析】圆 $(x-a)^2+y^2=2$ 的圆心为(a，0)，半径为$\sqrt{2}$，直线 $x-y+1=0$ 与圆 $(x-a)^2+y^2=2$ 有公共点，则$\frac{|a+1|}{\sqrt{2}} \le \sqrt{2}$，解得 a 的取值范围是$[-3，1]$.

故选 B.

【考向 3】圆与圆位置关系

【思路】先求出两圆的圆心距 d，再与 r_1+r_2 和 r_1-r_2 去比较来判断. 比较重要的位置关系是内切和外切，此外注意位置关系和公切线情况的对应.

【例 31】两圆的半径分别是方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根且两圆的圆心距等于 3，则两圆的位位置关系是【B】

A.外离

B.外切

C.内切

D.相交

E.内含

【解析】方程 $x^2-3x+2=0$ 的两根是 1 和 2，两圆的圆心距是 3，两圆的半径之和等于圆心距，所以两圆的位置关系是外切.
故选 B.

【例 32】两圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 和 $(x-b)^2+(y-a)^2=r^2$ 相切，则【B】

A. $(a-b)^2=r^2$

B. $\left(a-b\right)^2=2r^2$

C. $\left(a+b\right)^2=r^2$

D. $\left(a+b\right)^2=2r^2$

E. $\left(a-b\right)^2=3r^2$

【解析】由于两圆的半径都是$|r|$，故两圆的位置关系只能是外切，有$(b-a)^2+(a-b)^2=(2r)^2$，即$(a-b)^2=2r^2$.
故选 B.

【例 33】两圆：C_1：$x^2+y^2+2x+2y-2=0$与C_2：$x^2+y^2-4x-2y+1=0$的公切线有____条.【C】

A.0

B.1

C.2

D.3

E.4

【解析】圆C_1：$(x+1)^2+(y+1)^2=4$，圆心为$C_1(-1,\ -1)$.
圆C_2：$(x-2)^2+(y-1)^2=4$，圆心为$C_2(2,\ 1)$，两圆半径均为 2.

$|C_1C_2|=\sqrt{(2+1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{13}<4$，故两圆相交，所以两圆有两条外公切线.

故选 C.

【例 34】圆$C_1:\left(x-2\right)^2+\left(y-1\right)^2=r^2$,与圆$C_2:x^2-6x+y^2-8y=0$有交点，那么$r$的取值范围是【C】

A. $5-\sqrt{10}<r<5$

B. $5-\sqrt{10}<r<5+\sqrt{10}$

C. $5-\sqrt{10}\le r\le 5+\sqrt{10}$

D. $5-\sqrt{10}\le r\le 5$

E. $5\le r\le 5+\sqrt{10}$

【解析】圆C_2的标准方程是$(x-3)^2+(y-4)^2=25$，圆心为$(3,\ 4)$，半径为 5，两圆的圆心距 $d=\sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$，两圆有交点，所以 r 的取值范围是 $5-\sqrt{10}\le r\le 5+$

$\sqrt{10}$.
故选 C.

【例 35】两圆 $x^2+y^2-4x+2y+1=0$ 与 $x^2+y^2+4x-4y-1=0$ 的公切线有____条.【C】

A.1

B.2

C.3

D.4

E.5

【解析】
两圆的标准方程为 $(x-2)^2+(y+1)^2=4$，$(x+2)^2+(y-2)^2=9$，所以两圆的圆心距 $d=\sqrt{(2+2)^2+(-1-2)^2}=5$，，因为 $r_1=2$，$r_2=3$，所以 $d=r_1+r_2=5$，即两圆外切，公切线有 3 条.
故选 C.

【例 36】若圆 $x^2+y^2=4$ 与圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$ 内切，则 a 的值是【D】

A.－1

B.1

C.2

D.±1

E.±2

【解析】圆 $x^2+y^2=4$ 的圆心为 $(0,0)$，半径为 2，圆 $x^2+y^2-2ax+a^2-1=0$ 可以写为 $(x-a)^2+y^2=1$，圆心为 $(a,0)$，半径为 1，依题意 $|a|=1$，所以 $a=\pm1$.
故选 D.

第八章 立体几何

【模块 8－01】长方体

【考点 8－01－01】长方体

【考向 1】长方体

【思路】掌握长方体的棱长、体对角线、表面积和体积的公式.

【例 1】一个长方体，长与宽之比是 2：1，宽与高之比是 3：2，若长方体的全部棱长之和是 220 厘米，则长方体的体积是【D】

A.2880 立方厘米

B.7200 立方厘米

C.4600 立方厘米

D.4500 立方厘米

E.3600 立方厘米

【解析】根据高:宽:长 $=2:3:6$，全部棱长之和为 220，则高＋宽＋长＝$\frac{220}{4}=55$，故高为 $\frac{2}{2+3+6}\times 55=10$，宽为 15，长为 30，则体积为 $10\times 15\times 30=4500$ 立方厘米.

故选 D.

【例 2】长方体的三条棱的比是 3：2：1，表面积是 88，则最长的一条棱等于【E】

A.8

B.11

C.12

D.14

E.6

【解析】设长方体三条棱长分别为 3a，2a，a，则 $22a^2=88$，解得 $a=2$，故最长的棱为 $3a=6$. 故选 E.

【例 3】长方体的 3 个侧面的面积分别为：$2cm^2$，$6cm^2$，$3cm^2$，求长方体的体积【C】

A. $4cm^3$

B. $5cm^3$

C. $6cm^3$

D. $7.5cm^3$

E. $9cm^3$

【解析】设长方体的三条棱长分别为 a，b，c，则根据题意有 $\begin{cases}ab=2\\bc=6\\ac=3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=1\\b=2\\c=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a=-1\\b=-2\\c=-3\end{cases}$（舍去），故体积 $V=abc=6$.

故选 C.

【考向 2】正方体

【思路】正方体比较简单，掌握棱长和、体对角线、表面积和体积公式即可.

【例 4】已知某正方体的体对角线长为 3，那么这个正方体的全面积是【B】

A.16

B.18

C.20

D.22

E.24

【解析】设正方体的棱长为 x，故 $d=\sqrt{3}x=3$，解得 $x=\sqrt{3}$，故 $s=6x^2=18$.
故选 B.

【模块 8－02】柱体

【考点 8－02－01】柱体

【考向 1】圆柱

【思路】掌握圆柱的侧面积、表面积及体积的计算公式. 尤其注意特殊的等边圆柱.

【例 5】若圆柱体的高增大到原来的 3 倍，底半径增大到原来的 1.5 倍，则其体积增大到原来的体积的倍数是【B】

A.4.5

B.6.75

C.9

D.12.5

E.15

【解析】由于圆柱体的体积为 $V=\pi r^2h$，故体积为原来的$1.5^2\times3=6.75$ 倍.
故选 B.

【例 6】一个圆柱的侧面展开图是正方形，那么它的侧面积是下底面积的____倍.【C】

A.2

B.4

C.4π

D.π

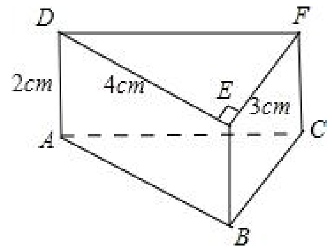
E.2π

【解析】由题意，h=2πr，故$\frac{S_{侧}}{S_{底}}=\frac{2\pi r\cdot h}{\pi r^2}=4\pi$. 故选 C.

【考向 2】棱柱

【思路】掌握常见的三棱柱和四棱柱的表面积和体积计算公式.

【例7】如图，直三棱柱的上下底面是直角三角形，求三棱柱的表面积. 【D】



A.28
B.30
C.32
D.36
E.38
【解析】根据 5 个面的面积求和来计算三棱柱的表面积：$2(3+4+5)+3\times4=36$.
故选 D.

【例 8】一个四棱柱的侧面展开图是边长为 40 的正方形，它的底面也是正方形，求它的体积【B】
A.2800
B.4000
C.4200
D.4800
E.5000
【解析】根据侧面展开图是边长为 40 的正方形，底面也是正方形，得到底边长为 10，高为 40，所以体积为 $10\times10\times40=4000$.
故选 B.

【模块 8－03】球体

【考点 8－03－01】球体

【考向 1】球的基本公式

【思路】掌握球体的体积和表面积的基本公式．注意表面积与半径的平方成正比，体积与半径的体积成正比.

【例 9】若一球体的表面积增加到原来的 9 倍，则它的体积【B】
A.增加到原来的 9 倍
B.增加到原来的 27 倍
C.增加到原来的 3 倍
D.增加到原来的 6 倍
E.增加到原来的 8 倍
【解析】球的表面积为 $S=4\pi r^2$，由于球体的表面积增加到原来的 9 倍，说明半径为原来的 3 倍，又有球的体积为 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$，故体积为原来的 27 倍.
故选 B.

【考向 2】内切球和外接球

【思路】掌握长方体、正方体和圆柱体的外接球公式，掌握正方体和等边圆柱的内切球公式.

【例 10】如果球的一个内接长方体的三条棱长分别为 1,2,3,那么该球的表面积为【D】

A. $\frac{7\sqrt{14}}{6}\pi$

B. 7π

B. $\frac{7\sqrt{14}}{3}\pi$

D. 14π

E. 28π

【解析】长方体的对角线长为$\sqrt{1^2+2^2+3^2}$=$\sqrt{14}$，则球的半径 $R=\frac{1}{2}\sqrt{14}$，从而 S 球 =

$4\pi R^2=14\pi$.

故选 D.

【例 11】能切割为球的圆柱，切割下来部分的体积占球体积至少为【C】

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{1}{4}$

E. $\frac{1}{3}$

【解析】设球半径为 R，当球恰好内切于圆柱时，V 球=$\frac{4}{3}\pi R^3$，V 圆柱 = $\pi R^2\cdot 2R=2\pi R^3$，

从而$\frac{V圆柱-V球}{V球}=\frac{1}{2}$.

故选 C.

【例 12】把一个半球削成底半径为球半径一半的圆柱，则半球体积和圆柱体积之比为【E】

A.4：1

B.8：3

B.16：3

D.16：$3\sqrt{2}$

E.16：$3\sqrt{3}$

【解析】设球的半径为 R，则圆柱体的高 $h=\sqrt{R^2-(\frac{1}{2}R)^2}$=$\frac{\sqrt{3}}{2}$R，

从而$V_{半球}$：$V_{圆柱}=\frac{2}{3}\pi R^3$：$\left[\pi\left(\frac{1}{2}R\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}R\right]=16:3\sqrt{3}$.

故选 E.

【考向 3】球的截面

【思路】设球心到截面的距离为 d、球的半径为 R、截面的半径为 r，根据勾股定理，则有 $r^2+d^2=R^2$.

【例 13】两个平行平面去截半径为 5 的球，若截面面积分别为$9\pi,16\pi$，则这两个平行平面间的距离是【D】

A.1

B.7

C.3 或 4

D.1 或 7

E.3 或 5

【解析】由截面面积分别为 9π 和 16π，得到截面的半径分别为 3 和 4，再根据球的半径为 5，可以得到球心到每个截面的距离为 4 和 3，考虑到两截面有可能在球心的同侧或者两侧，所以两个截面的距离为 1 或 7.

故选 D.

【模块 8－04】锥体

【考点 8－04－01】圆锥

【考向 1】圆锥的基本公式

【思路】掌握圆锥的表面积和体积以及圆心角的基本公式.

【例 14】已知圆锥地面圆的半径为 6，高为 8.则圆锥的侧面积为【D】

A.48

B.48π

C.120π

D.60π

E.90π

【解析】$r=6$，$h=8$，母线 $l=\sqrt{r^2+h^2}=10$.

圆锥侧面积$S_{侧}=\pi rl=\pi\times6\times10=60\pi$.

故选 D.

【例 15】将一个圆心角是 90° 的扇形围成一个圆锥的侧面，则该圆锥的侧面积$S_{侧}$和底面积$S_{底}$的关系为【E】

A.$S_{侧}=S_{底}$

B.$S_{侧}=2S_{底}$

C.$S_{侧}=3S_{底}$

D.$S_{侧}=3.5S_{底}$

E.$S_{侧}=4S_{底}$

【解析】圆心角$\theta=\frac{2\pi r}{l}=\frac{\pi}{2}$，则 $l=4r$.

$\frac{S_{侧}}{S_{底}}=\frac{\pi rl}{\pi r^2}=\frac{l}{r}=4$.

故选 E.

【例 16】如图 1，在正方形铁皮上剪下一个扇形和一个半径为 1 的圆形，使之恰好围成图 2 所示的一个圆锥，则圆锥的高为【C】

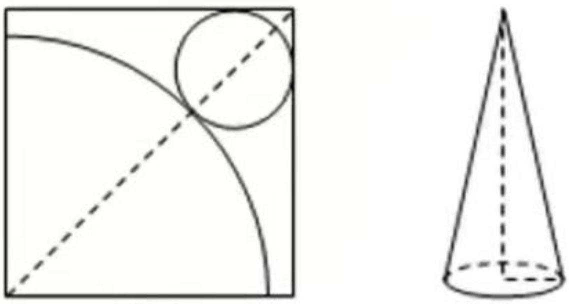


图 1　　图 2

A.$\sqrt{17}$
B.4
C.$\sqrt{15}$
D.$\sqrt{3}$
E.3.5
【解析】由图可得，圆锥的底面半径为 1.

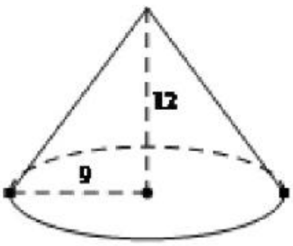
圆心角$\theta=\frac{2\pi r}{l}=\frac{\pi}{2}$，则 $l=4r=4$.

$h=\sqrt{4^2-1^2}=\sqrt{15}$.

故选 C.

【例 17】小红需要用扇形薄纸板成底面半径为 9 厘米，高为 12 厘米的圆锥形生日帽，则该

扇形薄纸板的圆心角为【C】



A.150°

B.180°

C.216°

D.240°

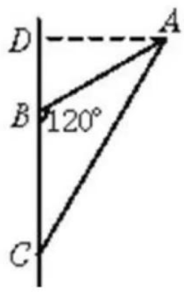
E.270°

【解析】由题意得：母线 $l=\sqrt{12^2+9^2}=15$.

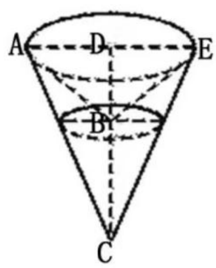
圆心角 $\theta=\frac{360°r}{l}=\frac{9\times360°}{15}=216°$

故选 C.

【例 18】在△ABC 中，AB＝2，BC＝1.5，∠ABC＝120°（如图所示），若将△ABC 绕直线 BC 旋转一周，则所形成的旋转体的体积是【E】



图(a)



图(b)

A.$\frac{7}{2}\pi$

B.$\frac{5}{2}\pi$

C.2π

D.$\frac{1}{2}\pi$

E.$\frac{3}{2}\pi$

【解析】由图可得：该旋转体的体积为圆锥 ACD－圆锥 ABD.

∵∠ABC＝120°，AB＝2.

∴∠ABD＝60°，BD＝1，AD＝$\sqrt{3}$，CD＝2.5.

则 $V_{旋转体}=\frac{1}{3}\pi r^2(CD-BD)=\frac{1}{3}\pi\times3\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\pi$.

故选 E.

【例 19】在一个深为 50m，顶圆半径为 100m 的正圆锥体储水容器储满水，假设其水位以 2m/h 的速度均匀下降，当 10 小时的时候，水池内有多少水？【B】

A.108 000π

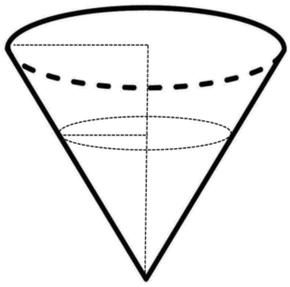
B.36 000π

C.54 000π

D.21 600π

E.10 800π

【解析】由题目可画图如下.



$r=100$，$h=50$.

10 小时的时候，水池的高度为$h_1=50-2\times10=30\text{m}$.

由相似三角形可得：此时水面圆的半径$r_1=60\text{m}$.

则水池的水$V_{水}=\frac{1}{3}\pi\times60^2\times30=36\ 000\pi$.

故选 B.

【例 20】一个底面直径为 20 的装有一部分水的圆柱形容器，水中放着一个底面直径为 12，高为 10 的圆锥形的铅锤，当铅锤从水中取出来，容器中的水面高度下降了【D】

A.2.4

B.2

C.1.6

D.1.2

E.0.9

【解析】圆锥形的铅锤体积为$V_{锥}=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{12}{2}\right)^2\times10=120\pi$.

则水池的水$V_{水}=\pi\times\left(\frac{20}{2}\right)^2\times h=120\pi$.

解得 $h=1.2$.

故选 D.

【例 21】有一个圆锥体沙堆，底面积是 20 平方米，高 1.2 米.用这堆沙铺在 10 米宽的公路上，铺 2 厘米厚，能铺多少米长的公路？【D】

A.20 米

B.25 米

C.30 米

D.40 米

E.45 米

【解析】设能铺 x 米长的公路.

圆锥体沙堆体积为$V_{沙}=\frac{1}{3}\times 20\times 1.2=V_{路}=10\times 0.02x$.

解得 x＝40.

故选 D.

【考向 2】圆锥的截面

【思路】圆锥轴截面都为等腰三角形，特殊情况有等边三角形，主要观察圆心角的度数.

【例 22】若一个圆锥的轴截面是等边三角形，其面积为$\sqrt{3}$，则这个圆锥的全面积是【A】

A.3π

B.$3\sqrt{3}\pi$

C.6π

D.9π

E.10π

【解析】由等边三角形的面积 $S=\frac{\sqrt{3}}{4}\times l^2=\sqrt{3}$.

则母线 $l=2$，$r=1$.

圆锥全面积$S_{全}=\pi r(r+l)=\pi\times 1\times 3=3\pi$.

故选 A.

【例 23】在半径为 30 米的圆形广场中央上空，设置一个照明光源，射向地面的光是圆锥形，且轴截面顶角为 120°，若要光源恰好照亮整个广场，则其高度应为多少米？【C】

A.$30\sqrt{3}$

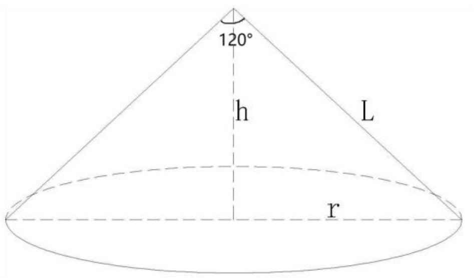
B.$15\sqrt{2}$

C.$10\sqrt{3}$

D.15

E.16

【解析】根据题目画图可得：



r＝30m，则根据截面顶角为 120° 得：$h=\frac{r}{\tan 60^\circ}=\frac{30}{\sqrt{3}}=10\sqrt{3}$.

故选 C.

【考向 3】内切球与外接球

【思路】掌握圆锥的外接球与内切球的相关公式.

【例 24】已知圆锥的底面半径为 6，母线长为 10，则圆锥的外接球表面积为【E】

A.300π

B.360π

C.450π

D.540π

E.$\frac{625}{4}\pi$

【解析】圆锥的高为 $h=\sqrt{10^2-6^2}=8$.

根据公式，外接球的半径 $R=\frac{l^2}{2h}=\frac{100}{2\times8}=\frac{25}{4}$.

外接球的表面积 $S=4\pi R^2=4\pi\times\frac{25\times25}{4\times4}=\frac{625}{4}\pi$.

故选 E.

【例 25】有一个倒圆锥形容器，它的轴截面是一个正三角形，在容器内放入一个半径为 r 的球，并注入水，使水面与球正好相切，然后将球取出，这时容器中水的深度是【A】

A.$\sqrt[3]{15}r$

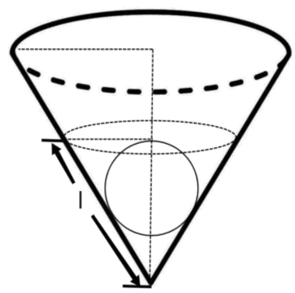
B.$2r$

C.$\frac{3r}{2}$

D.$\sqrt{6}r$

E.$\sqrt[3]{14}r$

【解析】根据题目如图所示：



球为水面下的圆锥体的内切球，则球半径与圆锥母线关系为 $\frac{\sqrt{3}}{6}l=r \Rightarrow l=2\sqrt{3}r$.

由轴截面为正三角形，则水面圆的半径为 $R=\frac{1}{2}l=\sqrt{3}r$，$h=\sqrt{3}R=3r$.

此时球在水里时，水面下的圆锥体的体积为 $V_{大}=\frac{1}{3}\pi\times\left(\sqrt{3}r\right)^2\times3r=3\pi r^3$.

其中水的体积 $V_{水}=V_{大}-V_{球}=3\pi r^3-\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{5}{3}\pi r^3$.

设取出球后的水面下的圆锥体的高为 h.

则$V_{水}=\frac{1}{3}\pi\times\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2\times h=\frac{\pi h^3}{9}$.

得$\frac{\pi h^3}{9}=\frac{5}{3}\pi r^3\Longrightarrow h=\sqrt[3]{15}r$.

故选 A.

第四部分 数据分析

第九章 排列组合

【模块 9-01】基本理论知识

【考点 9-01-01】两个基本原理

【考向 1】加法原理

【思路】遇到分类求解时，采用加法原理.

【例 1】甲同学计划五一去重庆游玩，从南京出发.五一当天南京到重庆的火车有 3 班，轮船有 2 班，飞机有 5 班，请问甲同学一共有多少种不同的走法？【D】

（A）3　（B）2　（C）5　（D）10　（E）30

【解析】分类：$3+2+5=10$(每类独立完成任务).故选 D.

【例 2】各数位的数字之和是 24 的三位数共有多少个？【D】

（A）5　（B）6　（C）8　（D）10　（E）12

【解析】24 分为三个数的和的方式有“8+8+8”、“9+9+6”、“7+8+9”，而“8+8+8”的三位数只有 1 个；“9+9+6”的三位数有“996,969,699”3 种，而“7+8+9”的三位数有“789,798,879,897,978,987”有 6 种。一共 10 种。故选 D.

【考向 2】乘法原理

【思路】遇到分步求解时，采用乘法原理.

【例 3】一班为了参加校运动会的 4100 米接力赛选拔运动员，现经过同学商议有 2 名同学可以跑第一棒，3 名同学能跑第二棒，2 名同学能跑第三棒，只有 1 人能跑最后一棒，那么一班最后的接力赛出场顺序一共有几种可能？【E】

（A）5　（B）3　（C）8　（D）7　（E）12

【解析】同一事件的不同步骤，由乘法原理得 $2\times3\times2\times1=12$。故选 E.

【考向 3】加法乘法并存

【思路】当分类与分步同时出现，一定要先宏观分类，再微观分步.

【例 4】从 5 幅国画，3 幅油画，2 幅水彩画中选取两幅不同类型的画布置教室，问有几种不同的选法？【D】

（A）35　（B）33　（C）32　（D）31　（E）30

【解析】先分类，再分步：

“国”+“水”：$C_5^1\times C_3^1+C_5^1C_2^1+C_3^1\times C_2^1$=31.故选 D。

【考点 9-01-02】排列与组合

【考向 1】排列和组合的计算

【思路】根据排列和组合的定义及公式来计算.

【例 5】计算 $C_8^4 - C_7^3$ 的数值为【E】

（A）25　　（B）28　　（C）30　　（D）32　　（E）35

【解析】$C_8^4 = \frac{8\times7\times6\times5}{4\times3\times2\times1} = 70$，同理$C_7^3 = 35$，故选 E.

【例 6】若 $C_{m-1}^{m-2} = \frac{3}{n-1} C_{n+1}^{n-2}$，则【D】

(A) $m = n-2$　　(B) $m = n+2$　　(C) $m = \sum_{k=1}^{n} k$

(D) $m = 1 + \sum_{k=1}^{n} k$　　(E)无法确定

【解析】特值法，不妨设$n = 4$，$C_{m-1}^{m-2} = C_{m-1}^{1} = \frac{3}{3}C_5^2 = 10$，得到$m-1 = 10$，$m = 11.n = 2$:$m-1 = \frac{3}{1}C_3^0 = 3$，$m = 4$。故选 D.

【考向 2】排列和组合的应用

【思路】根据排列和组合的定义及公式来计算.

【例 7】用列举法求从 ABCD 四个不同元素中，任取两个元素的排列有几个？　【E】

（A）5　　（B）6　　（C）7　　（D）8　　（E）12

【解析】列举法：AB，BA，AC，CA，AD，DA，BC，CB，BD，DB，CD，DC。故选 E.

【例 8】用列举法求从 ABCD 四个不同元素中，任取两个元素的组合有几个？　【B】

（A）5　　（B）6　　（C）7　　（D）8　　（E）12

【解析】列举法：AB，AC，AD，BC，BD，CD。故选 B.

【例 9】有从 1 到 9 共计 9 个号码球，请问，如果三个一组，代表“三国联盟”，可以组合成多少个“三国联盟”？　【A】

（A）84　　（B）124　　（C）254　　（D）358　　（E）504

【解析】由题可得，属于组合问题：$C_9^3 = 84$，故选 A.

【例 10】有从 1 到 9 共计 9 个号码球，任取三个，可以组成多少个三位数？　【E】

（A）404　　（B）424　　（C）454　　（D）458　　（E）504

【解析】由题可得，属于排序问题：$9\times8\times7 = 504$，故选 E.

【模块 9-02】六大基本方法

【考点 9-02-01】相邻元素打包捆绑法

【考向 1】相邻元素打包捆绑法

【思路】对于相邻元素，采用打包捆绑法时，要注意捆绑内部的排序．此外，有的题目可能会会出现打多个包的问题.

【例 11】3 个三口之家一起观看演出，他们购买了同一排的 9 张连座票，则每一家的人都坐在一起的不同坐法有【D】

$(A)\ (3!)^2$ 种 $(B)\ (3!)^3$ 种 $(C)\ 3(3!)^3$ 种 $(D)\ (3!)^4$ 种 $(E)\ 9!$ 种

【解析】利用捆绑法，可得 $3!\times3!\times3!\times3!=(3!)^4$. 故选 D.

【例 12】7 人站成一排，其中甲乙相邻且丙丁相邻，共有多少种不同的排法.【A】

（A）480 （B）460 （C）420 （D）408 （E）390

【解析】利用捆绑法，$2!\times2!\times5!=480$.故选 A.

【例 13】用 1,2,3,4,5 组成没有重复数字的五位数其中恰有两个偶数夹 1,5 在两个奇数之间,这样的五位数有多少个？【A】

（A）8 （B）9 （C）10 （D）12 （E）14

【解析】利用捆绑法，$2!\times2!\times2!=8$.故选 A.

【考点 9-02-02】相间元素插空法

【考向 1】相间元素插空法

【思路】先排好其他元素，再将不相邻的元素插入空位即可.

【例 14】7 人站成一排照相， 若要求甲、乙、丙不相邻，则有多少种不同的排法？【E】

（A）1020 （B）1040 （C）1140 （D）1220 （E）1440

【解析】利用插空法，$4!\times C_5^3\times3!=1440$. 故选 E.

【例 15】一个晚会的节目有 3 个舞蹈,2 个相声,2 个独唱,舞蹈节目不能连续出场,则节目的出场顺序有多少种？【E】

（A）1020 （B）1040 （C）1140 （D）1220 （E）1440

【解析】利用插空法，$4!\times C_5^3\times3!=1440$.故选 E.

【例 16】宿舍楼走廊上有照明灯一排 8 盏，为节约用电又不影响照明，要求同时熄掉其中 3 盏，但不能同时熄掉相邻的灯，问熄灯的方法有多少种？【C】

(A)16 (B)18 (C)20 (D)22 (E)24

【解析】利用插空法，可得 8 盏灯中亮 5 盏，暗 3 盏. $C_6^3=20$. 故选 C.

【考向 2】相邻与不相邻同时出现

【思路】相邻与不相邻同时出现，先考虑相邻元素，即先打包，最后考虑不相邻元素.

【例 17】7 人站成一行，如果甲、乙相邻，他们不与丙相邻，则不同的排法种数是【B】

(A)940 种　(B)960 种　(C)980 种　(D)1100 种　(E)1200 种

【解析】同时利用插空法和捆绑法，$2!\times4!\times C_5^2\times2!=960$.故选 B.

【例 18】3 男 3 女共 6 人站成一行，恰有两个女生相邻的不同的排法种数是【C】

(A)410 种　(B)420 种　(C)432 种　(D)480 种　(E)490 种

【解析】同时利用插空法和捆绑法，$3!\times C_3^2\times2!\times C_4^2\times2!=432$. 故选 C.

【考向 3】两类都不相邻

【思路】当出现两类元素都不相邻，先排好其中一类，再将另一类插空，注意中间的空位都要占满.

【例 19】3 男 3 女共 6 人站成一行，女生不相邻，男生也不相邻的不同排法种数是【C】

(A)64 种　(B)68 种　(C)72 种　(D)80 种　(E)90 种

【解析】先排好再插空，$3!\times3!\times2=72$.故选 C.

【例 20】4 男 3 女共 7 人站成一行，女生不相邻，男生也不相邻的不同排法种数是【E】

(A)104 种　(B)112 种　(C)124 种　(D)128 种　(E)144 种

【解析】先排好再插空，$4!\times3!=144$.故选 E.

【考点 9-02-03】相同元素隔板法

【考向 1】相同元素隔板法

【思路】隔板法使用要求:①n 个元素要相同，②m 个分配对象不同，对应的公式：如果分配对象非空，即每个对象至少分一个，则有 C_{n-1}^{m-1} 种；如果分配对象允许空，则有 C_{n+m-1}^{m-1} 种

【例 21】有 10 个运动员名额，分给 7 个班，每班至少一个,有多少种分配方案？【A】

（A）84　（B）124　（C）254　（D）258　（E）304

【解析】利用隔板法，$C_{10-1}^{7-1}=C_9^6=C_9^3=84$.故选 A.

【例 22】有 18 个运动员名额，分给 7 个班，每班至少 2 个,有多少种分配方案？【D】

（A）94　（B）124　（C）168　（D）210　（E）240

【解析】先给每一个班分一个，剩余 $18-7=11$ 个. $C_{11-1}^{7-1}=C_{10}^6=C_{10}^4=210$. 故选 D.

【例 23】满足 $x_1+x_2+x_3+x_4=12$ 的正整数解的组数有多少？【B】

(A)160 种　(B)165 种　(C)175 种　(D)184 种　(E)190 种

【解析】因为是正整数解，利用隔板法，$C_{12-1}^{4-1}=C_{11}^3=165$. 故选 B.

【例 24】将 10 块相同的糖分给 4 个小朋友，如果每人至少分 1 块糖，有 n 种分法，如果允许有人没有分到，则有 m 种分法，求 m-n 的值.【E】

(A)160　(B)164　(C)175　(D)184　(E)202

【解析】由题，$n=C_{10-1}^{4-1}=C_q^3=84$，$m=C_{10+4-1}^{4-1}=C_{13}^3=\frac{13\times12\times11}{3\times2\times1}=286$. 故选 E.

【考点 9-02-04】重复元素方幂法

【考向 1】重复元素方幂法

【思路】要学会套公式及公式的应用，注意不要把底数与指数写反了.

【例 25】有 5 人报名参加 3 项不同的培训，每人都只报一项，则不同的报法有【A】

（A）243 种　（B）125 种　（C）81 种　（D）60 种　（E）56

【解析】$3^5=243$，故选 A.

【例 26】有 5 人报名参加 3 项不同的比赛，每项比赛只能一人夺冠，则不同的冠军方法数有【B】

（A）243 种　（B）125 种　（C）81 种　（D）60 种　（E） 54

【解析】$C_5^1\times C_5^1\times C_5^1=5^3$，故选 B.

【例 27】把 6 名实习生分配到 7 个车间实习，共有多少种不同的分法【A】

（A） 7^6　（B） 6^7　（C） $7!$　（D） $6!$　（E） C_7^6

【解析】7^6，故选 A.

【考点 9-02-05】对号与不对号

【考向 1】对号与不对号

【思路】元素对号入座只有 1 种排法，元素不对号入座可以记住答案：2 个不对号有 1 种方法，3 个不对号有 2 种方法，4 个不对号有 9 种方法，5 个不对号有 44 种方法.

【例 28】设有编号为 1、2、3、4、5 的 5 个小球和编号为 1、2、3、4、5 的 5 个盒子，现将这 5 个小球放入这 5 个盒子内，要求每个盒子内放一个球，且恰好有 1 个球的编号与盒子的编号相同，则这样的投放方法的总数为【C】

(A)20 种　(B)30 种　(C)45 种　(D)60 种　(E)130 种

【解析】$C_5^1\times 9=45$，故选 C.

【例 29】有 6 位老师分别教 6 个班，期末考试监考时，恰有两个老师监考自己教的班，这样的监考方法有____种?【C】

(A)120　(B)130　(C)135　(D)160　(E)180

【解析】$C_6^2\times 9=15\times 9=135$，故选 C.

【例 30】有 6 位老师分别教 6 个班，期末考试监考时，至少有两个老师监考自己教的班，这样的监考方法有____种?【D】

(A)170　(B)180　(C)190　(D)191　(E)192

【解析】$C_6^2\times 9+C_6^3\times 2+C_6^4\times 1+C_6^5\times 0+C_6^6=191$，故选 D.

【考点 9-02-06】穷举列举法

【考向 1】穷举列举法

【思路】当遇到对元素的约束条件无法采用组合直接选取时，此时需要按照所给的约束条件进行列举，如果正面列举比较多，可从反面列举求解.

【例 31】有 8 张卡片，上面分别写着自然数 1 至 8. 从中取出 3 张，要使这 3 张卡片上的数

字之和为 9. 问有多少种不同的取法?【B】

(A)2　　(B)3　　(C)4　　(D)5　　(E)6

【解析】通过列举法可知，只有以下情况满足：$1+2+6$，$1+3+5$，$2+3+4$ 共 3 钟，故选 B.

【例 32】用一台天平和重 1 克、3 克、9 克的砝码各一个（不再用其他物品当砝码），当砝码只能放在同一个盘内时，可以称出的重量有多少种？【D】

(A)4　　(B)5　　(C)6　　(D)7　　(E)8

【解析】列举法可知：

（1）一个砝码：1g，3g，9g

（2）两个砝码：（$1+3$）g，（$1+9$）g，（$3+9$）g

（3）三个砝码：（$1+3+9$）g

故选 D.

【例 33】小明带了 1 张 5 元、4 张 2 元的纸币和 8 枚 1 元的硬币，现在他要买一本 8 元的小说，问他有多少种付钱方式？【D】

(A)4　　(B)5　　(C)6　　(D)7　　(E)8

【解析】列举法可知：$5+2+1$，$5+1+1+1$，$2+2+2+2$，$2+2+2+1+1$，$2+2+1+1+1+1$，$2+1\times 6$，1×8 共 7 钟情况. 故选 D.

【例 34】用 1 角、2 角和 5 角的三种人民币（每种的张数没有限制）组成 1 元钱，有多少种方法？　【E】

（A）5　　（B）6　　（C）7　　（D）8　　（E）10

【解析】列举法：

0.1×100，2×5，0.5×2，$0.1+0.2\times 2+0.5$，$0.1\times 3+0.2+0.5$，$0.1\times 5+0.5$，$0.1\times 2+0.2\times 4$，$0.1\times 4+0.2\times 3$，$0.1\times 6+0.2\times 2$，$0.1\times 8+0.2$ 故选 E.

第十章 概率初步

【模块 10-01】古典概型

【考点 10-01-01】基本理论知识

【考向 1】基本概念

【思路】根据事件的定义进行分析，尤其必然事件与不可能事件是两个特殊情况.

【例 1】下列事件中，属于必然事件的是【D】

(A)打开电视机，它正在播广告

(B)打开数学书，恰好翻到第 50 页

(C)抛掷一枚均匀的硬币，恰好正面朝上

(D)一天有 24 小时

(E)买彩票中奖

【解析】由选项可知，只有 D 项为必然事件，故选 D.

【例 2】下列事件中，属于不可能事件的是（　　）【C】

(A)随意掷一枚均匀的硬币两次，至少有一次反面朝上；

(B)今年冬天北京会下雪；

(C)随意掷两个均匀的骰子，朝上面的点数之和为 1；

(D)一个转盘被分成 6 个扇形，按红、白、白、红、红、白排列，转动转盘，指针停在红色区域.

(E)北京到上海的某航班会晚点.

【解析】由选项可知，只有 C 项为不可能事件，故选 C.

【考点 10-01-02】取样古典概率

【考向 1】取样方式

【思路】取样方式分为逐次取样(有放回、无放回)和一次性取样. 逐次取样注意顺序，一次性取样不考虑顺序. 此外逐次无放回取样的概率=一次性取样的概率.

【例 3】一袋中有 8 个大小形状相同的球，其中 5 个黑色球，3 个白色球.

（1）从袋中随机地取出两个球，求取出的两球都是黑色球的概率.

（2）从袋中**不放回**取两次，每次取一个球，求取出的两球都是黑色球的概率.

（3）从袋中**有放回**取两次，每次取一个球，求取出的两球至少有一个是黑球的概率.

【解析】

（1）$P_1=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{10}{28}=\frac{5}{14.}$

（2）$P_2=\frac{C_5^1C_4^1}{C_8^1C_7^1}=\frac{5}{14}$

（3）$P_3=1-\frac{C_3^1C_2^1}{C_8^1C_8^1}=1-\frac{3}{32}=\frac{29}{32}$

【考向 2】取球得分

【思路】根据得分讨论所取样品的情况，再写概率表达式.

【例 4】袋中有 6 只红球、4 只黑球，今从袋中随机取出 4 只球，设取到一只红球得 2 分，取到一只黑球得 1 分，则得分不大于 6 分的概率是 【A】

（A）$\frac{23}{42}$ （B）$\frac{4}{7}$ （C）$\frac{25}{42}$ （D）$\frac{13}{21}$ （E）$\frac{11}{21}$

【解析】$p=\frac{C_4^4+C_4^3C_6^1+C_4^2C_6^2}{C_{10}^4}=\frac{23}{42}$.，故选 A.

【考向 3】取样编号

【思路】遇到有编号的取样，往往涉及到编号的运算，结合列举法分析.

【例 5】一袋中装有大小相同，编号分别为1,2,3,4,5,6,7,8 的八个球，从中有放回地每次取一个球，共取 2 次，则取得两个球的编号和不小于 15 的概率为【D】

(A) $\frac{1}{32}$ (B) $\frac{1}{64}$ (C) $\frac{3}{32}$ (D) $\frac{3}{64}$ (E) $\frac{5}{64}$

【解析】因为是有放回的，$p_1=\frac{3}{C_8^1\times C_8^1}=\frac{3}{64}$.，故选 D.

【例 6】从编号为 1, 2, ⋯, 10 的 10 个大小相同的球中任取 4 个，则所取 4 个球的最大号码是 6 的概率为【D】

(A) $\frac{1}{84}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{2}{5}$ (D) $\frac{1}{21}$ (E) $\frac{1}{20}$

【解析】$p=\frac{C_5^3}{C_{10}^4}=\frac{1}{21}$.，故选 D.

【模块 10-02】独立事件

【考点 10-02-01】独立事件

【考向 1】两个独立事件模板

【思路】甲乙成功的概率分别为p_1和p_2，则(1)甲乙都成功的概率为$p_1\cdot p_2$；(2) 甲乙都不成功的概率为$(1-p_1)\cdot(1-p_2)$；(3)甲乙至少有一个成功的概率为$1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)$；(4)甲乙恰有一个成功的概率为$p_1\cdot(1-p_2)+(1-p_1)\cdot p_2$.

【例 7】甲、乙两人参加投篮游戏，已知甲、乙两人投中的概率分别为 0.6 和 0.75，则甲、乙两人各投篮 1 次，恰有 1 个人投中的概率是【B】

(A)0.4　　(B)0.45　　(C)0.5　　(D)0.55　　(E)0.65

【解析】$p=0.6\times0.25+0.4\times0.75=0.45.$，故选 B.

【考向 2】三个独立事件模板

【思路】甲乙丙成功的概率分别为$p_1 p_2$和p_3，则(1)三人都成功的概率为$p_1\cdot p_2\cdot p_3$；(2) 三人都不成功的概率为$(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_3)$；(3)至少有一个成功的概率为$1-(1-p_1)\cdot(1-p_2)\cdot(1-p_3)$；(4) 恰有两个成功的概率为$p_1\cdot p_2(1-p_3)+p_1\cdot(1-p_2)\cdot p_3+(1-p_1)\cdot p_2\cdot p_3$；(5)至多有两人成功的概率为$1-p_1\cdot p_2\cdot p_3$.

【例 8】甲、乙、丙三人进行定点投篮比赛，已知甲的命中率为 0.9，乙的命中率为 0.8，丙的命中率为 0.7，现每人各投一次．三人中至多有两人投进的概率为【B】

(A)0.456　　(B)0.496　　(C)0.516　　(D)0.528　　(E)0.542

【解析】从反面考虑，$p=1-0.9\times0.8\times0.7=0.496$，故选 B.

【考向 3】隐含至少有一个模板

【思路】遇到破译密码，烟火报警，命中敌机，中奖等，虽然题目没有写“至少有一个”，但是隐含了“至少有一个”，故需要从反面求解.

【例 9】某部门组织甲、乙两人破译一个密码，每人能否破译该密码相互独立．已知甲、乙各自独立破译出该密码的概率分别为$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{4}$.

(1)求他们恰有一人破译出该密码的概率；【D】

(A) $\frac{1}{6}$　　(B) $\frac{1}{4}$　　(C) $\frac{1}{5}$　　(D) $\frac{5}{12}$　　(E) $\frac{7}{12}$

(2)求他们破译出该密码的概率；【C】

(A) $\frac{1}{4}$　　(B) $\frac{1}{3}$　　(C) $\frac{1}{2}$　　(D) $\frac{3}{5}$　　(E) $\frac{2}{3}$

【解析】

（1）$P_1=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{12}$.故选 D.

（2）$p_2=1-\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$.故选 C.

【例 10】档案馆装了三个烟火感应报警器，遇到烟火，分别发出报警的概率分别为 0.9, 0.8, 0.7，若遇到烟火，则发出报警的概率为【C】

(A)0.996　　(B)0.995　　(C)0.994　　(D)0.96　　(E)0.94

【解析】$p=1-0.1\times0.2\times0.3=0.994$，故选 C.

【例 11】设有两门高射炮，每一门击中飞机的概率都是 0.6，试求：
(1)同时射击一发炮弹而命中飞机的概率；【D】
(A)0.64　(B)0.72　(C)0.82　(D)0.84　(E)0.86

(2)若又一架敌机侵犯，要以 99%的概率击中它，问需多少门高炮？（$2^{10}=1024$）【C】

(A)4　(B)5　(C)6　(D)7　(E)8
【解析】
（1）$P_1=1-0.4\times0.4=0.84$. 故选 C.
（2）$p_2=1-0.4^n\geq0.99.$，可得$0.4^n\leq0.01.$，解得$n\geq6$. 故选 C.

【考向 4】比赛模板

【思路】对于比赛问题，需要先画出每局比赛的结果图，再对应写概率.

【例 12】在一次竞猜活动中，设有 5 关，如果连续通过 2 关就算闯关成功，小王通过每关的概率都是$\frac{1}{2}$，他闯关成功的概率为【E】

（A）$\frac{1}{8}$　（B）$\frac{1}{4}$　（C）$\frac{3}{8}$　（D）$\frac{4}{8}$　（E）$\frac{19}{32}$

【解析】通过列举法：

$P=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^3+(\frac{1}{2})^4\times2+(\frac{1}{2})^5\times3=\frac{19}{32}$，故选 E.

【13】甲、乙、丙三人进行某项比赛，每局有两人参加，没有平局，在一局比赛中，甲胜乙的概率为$\frac{3}{5}$，甲胜丙的概率为$\frac{4}{5}$，乙胜丙的概率为$\frac{3}{5}$，比赛的规则是先由甲和乙进行第一局的比赛，然后每局的获胜者与未参加此局比赛的人进行下一局的比赛，在比赛中，有人获胜两局就算取得比赛的胜利，比赛结束.
(1)求只进行两局比赛，甲就取得胜利的概率；【C】

（A）$\frac{7}{25}$　（B）$\frac{9}{25}$　（C）$\frac{12}{25}$　（D）$\frac{18}{25}$　（E）$\frac{19}{25}$

(2)求只进行两局比赛，比赛就结束的概率；【D】

（A）$\frac{7}{25}$　（B）$\frac{9}{25}$　（C）$\frac{12}{25}$　（D）$\frac{18}{25}$　（E）$\frac{19}{25}$

(3)求甲取得比赛胜利的概率.【E】

（A）$\frac{1}{8}$　（B）$\frac{1}{4}$　（C）$\frac{3}{8}$　（D）$\frac{4}{8}$　（E）$\frac{3}{5}$

【解析】

（1）$P_1=\frac{3}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{12}{25}$.故选 C.

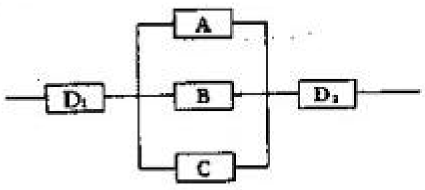
（2）$p_2=\frac{12}{25}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{18}{25}$. 故选 D.

（3）$P_3=\frac{12}{v_5}+\frac{3}{5}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$.故选 E.

【考向 5】电路模板

【思路】对于串联电路，系统正常工作的概率=每个正常工作的概率相乘；对于并联电路，系统正常工作的概率=1-每个不正常工作的概率相乘.

【例 14】下列框图中的字母代表元件种类，字母相同但下标不同的为同一类元件，已知 A,B,C,D 各类元件的正常工作概率依次为 p, q, r, s，且各元件的工作是相互独立的，则



此系统正常工作的概率为：【E】

(A) s^2pqr　　(B) $s^2(p+q+r)$　　(C) $s^2(1-pqr)$

(D) $1-(1-pqr)(1-s)^2$　　(E) $s^2[1-(1-p)(1-q)(1-r)]$

【解析】根据串联和并列电路的特征，可知正常工作：
$S^2\times[1-(1-p)(1-q)(1-r)]$，故选 E.

第十一章 数据描述

【模块 11-01】平均值

【考点 11-01-01】平均值

【考向 1】基本概念

【思路】根据 、众数、中位数的概念进行分析判断.

【例 1】下列说法错误的有几个？【B】

(1)在一组数据中，众数只有一个.

(2)中位数和众数不可能相等.

(3)一组数据的平均数和中位数不可能相等.

(4) 平均数、众数、中位数三者有可能相等.

(A)0　(B)1　(C)2　(D)3　(E)4

【解析】对（1），众数不一定只有一个，如 2,2,3,3,4 中，众数有 2 和 3.

对（2）、（3），比如 3,3,3,3 这组数据，众数、中位数和平均数均为 3.

故（4）正确，故选 B.

【考向 2】一组数平均值计算

【思路】根据平均值的定义，先求出总和，再除以个数得到平均值. 为了简化计算，可以将每个数都减去 m，求出剩余数的平均值，再加上 m 即可.

【例 2】在一次唱歌比赛中，8 位评委的评分如下表：

评委	1	2	3	4	5	6	7	8
评分	9.3	9.5	9.4	9.6	9.5	9.6	9.5	9.7

（1）8 位评委评分的众数是多少？【C】

(A)9.3　(B)9.4　(C)9.5　(D)9.6　(E)9.7

【解析】由表格可知，众数为 9.5，故选 C.

（2）8 位评委评分的中位数是多少？【C】

(A)9.3　(B)9.4　(C)9.5　(D)9.6　(E)9.7

【解析】对于中位数，先把原来的数据进行重新排序，即 9.3,9.4,9.5,9.5,9.6,9.6,9.7.

从而中位数为 9.5，故选 C.

（3）根据比赛规定，去掉一个最高分和一个最低分，再取剩下 6 个评委的平均数.这位选手的最后得分是多少？（答案保留两位小数）【B】

(A)9.42　(B)9.52　(C)9.53　(D)9.54　(E)9.56

【解析】即先去掉 9.3 和 9.7，然后计算得平均数约为 9.52，故选 B.

【考向 3】加权平均值计算

【思路】若已知各部分的平均值及数量之比，则利用加权平均求出整体的平均值.

【例 3】设 a,b,c 三种糖价格分别为 18 元/kg, 24 元/kg, 36 元/kg,若按混合比例为 3：2：1，则混合糖的合理价格为【D】

(A)20　(B)21　(C)22　(D)23　(E)24

【解析】$18\times\frac{3}{6}+24\times\frac{2}{6}+36\times\frac{1}{6}=23$，故选 D.

【例 4】在一次法律知识竞赛中，甲机关 20 人参加知识竞赛，平均分是 80 分，乙机关 30 人参加竞赛，平均分是 70 分，请问两个机关参加竞赛的人的平均分是多少？【C】

(A)76 分　(B)75 分　(C)74 分　(D)73 分　(E) 72 分

【解析】$80\times\frac{2}{5}+70\times\frac{3}{5}=74$，故选 C.

【考向 4】平均值比较

【思路】可以根据定义分别计算出平均值再进行比较，或者按照高分和低分占据的比重来分析.

【例 5】甲，乙，丙三个地区的公务员参加一次测评，其人数和考分情况如下表：

分数 人数 地区	6	7	8	9
甲	10	10	10	10
乙	15	15	10	20
丙	10	10	15	15

三个地区的平均分由高到低的排名顺序为【E】

(A) 乙、丙、甲
(B) 乙、甲、丙
(C) 甲、丙、乙
(D) 丙、甲、乙
(E) 丙、乙、甲

【解析】进行计算，得：

$\bar{X}_{甲}=\frac{6\times10+7\times10+8\times10+9\times10}{40}=7.5$，$\bar{X}_{乙}=\frac{6\times15+7\times15+8\times10+9\times20}{60}\approx7.58$，

$\bar{X}_{丙}=\frac{6\times10+7\times10+8\times15+9\times15}{50}=7.7$，故选 E.